3 1761 07550542 0

EXERCICES DU COURS

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie.
Quai des Grands-Augustins, 55.
61515-21

Mat
1

EXERCICES DU COURS

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Par J. HAAG,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CLERMONT-FERRAND
EXAMINATEUR SUPPLÉANT D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

TOME II.

GÉOMÉTRIE.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS et Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1921

415912
23.9.43

QH
37
H3
t. 2
pt.2

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

EXERCICES DU COURS

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

CHAPITRE I.

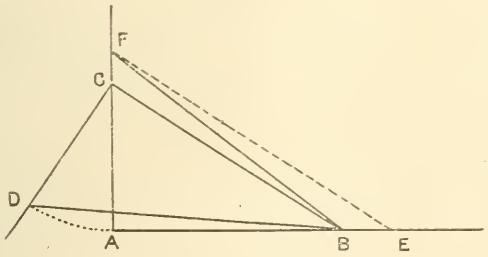
HOMOGÉNÉITÉ (1). CONSTRUCTION DES EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Construire l'expression* $x = \sqrt[4]{\frac{a^6 + b^6}{a^2 - b^2}}$.

Commençons par construire la longueur $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, au moyen du triangle rectangle ABC (*fig.* 1), dans lequel $AC = b$, $CB = a$, $BA = c$.

Fig. 1.



Puis, choisissant une longueur λ, nous devons construire (n° 6)

$$x = \sqrt{\frac{a^6 + b^6}{(a^2 - b^2)\lambda^2}} = \sqrt{\frac{a^6 - b^6}{c^2\lambda^2}}.$$

(1) Nous ne donnons pas d'exercices sur le principe de l'homogénéité, les occasions de l'appliquer ne devant pas manquer dans la suite de l'Ouvrage. Les vérifications de l'homogénéité sont, du reste, toujours très faciles.

Ayant le choix de λ, profitons-en pour amener des simplifications. Prenons, par exemple, $\lambda = \sqrt{a^2 + b^2} = \text{BD}$ (CD perpendiculaire à CB et égal à CA). Nous avons, en remarquant que $a^6 + b^6$ est divisible par $a^2 + b^2$,

$$y = \sqrt{\frac{a^4 - a^2 b^2 + b^4}{c^2}}.$$

Mais, on peut écrire :

$$a^4 - a^2 b^2 + b^4 = (a^2 - b^2)^2 + a^2 b^2 = c^4 + a^2 b^2.$$

Donc

$$y = \sqrt{c^2 + \frac{a^2 b^2}{c^2}}.$$

Construisons la quatrième proportionnelle $z = \dfrac{ab}{c} = \text{AF}$ ($\text{AE} = \text{BC}$, EF parallèle à BC). Nous avons $y = \sqrt{c^2 + z^2} = \text{BF}$.

Il ne nous reste plus qu'à construire la moyenne proportionnelle entre λ et y, ou BD et BF, pour avoir x.

Cet exemple montre comment, tout en appliquant les méthodes générales, on peut simplifier quelquefois les constructions par un choix judicieux des longueurs arbitraires.

2. *Construire la longueur* $x = \sqrt{2 + \sqrt{7}}$.

Rendons homogène (n° 4); u représentant l'unité de longueur, nous avons

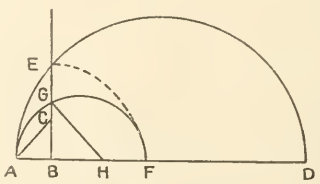
$$x = \sqrt{2u^2 + \sqrt{7u^4}}.$$

Nous allons maintenant construire y et z, telles que

$$y^2 = 2u^2 \qquad \text{et} \qquad z^2 = \sqrt{7u^4}.$$

La première longueur nous est donnée par le triangle rectangle isos-

Fig. 2.



cèle ABC($\text{AB} = \text{BC} = u$, $\text{AC} = y$) (*fig.* 2). La seconde $z = \sqrt[4]{7u^4}$ s'obtient par la méthode générale du n° 6. Prenant $\lambda = u$, nous cons-

truisons

$$t = \sqrt{\frac{\overline{7u}^2}{u^2}} = \sqrt{7u^2} = \sqrt{u.7u} = \mathrm{BE}(\mathrm{BD} = 7u).$$

Puis

$$z = \sqrt{tu} = \mathrm{BG}.$$

Portant enfin $\mathrm{BH} = \mathrm{AC}$, nous avons $x = \mathrm{GH}$.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Construire les longueurs $\frac{a^4}{b^2c}$, $\frac{a^2+b^2}{c}$, $\frac{a^4-b^3}{a^2+b^2}$, $\frac{a^4-b^2c^2+b^4}{b^3+c^3}$.

2. Construire les longueurs $\sqrt{\frac{a^2b}{c}}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}}$, $\sqrt{\frac{a^4+b^4}{a^2-b^2}}$, $\sqrt{\frac{a^4-b^4}{ab}}$, $\sqrt{\frac{a^5+a^3b^2}{c^3+c^2b}}$.

3. Construire les longueurs $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[4]{a^4-b^4}$, $\sqrt[4]{a^4+b^4-c^4}$, $\sqrt[4]{\frac{a^6}{b^2+c^2}}$, $\sqrt[8]{2}$, $\sqrt[4]{1+\sqrt{2}}$, $\sqrt{1+\sqrt[4]{3}}$.

4. Construire les racines des équations

$$2x^2-5x+1=0, \qquad x^2+4x-\sqrt{2}=0, \qquad x^4+3x^2-1=0,$$
$$3x^4-6x^2+2=0, \qquad x^4-2x^3+6x^2-2x+1=0.$$

CHAPITRE II.

GRANDEURS ORIENTÉES. PROJECTIONS.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Étant donnés quatre points* M, A, B, C *sur un axe* $x'x$, *démontrer la relation*

$$\overline{MA}^2.\overline{BC}+\overline{MB}^2.\overline{CA}+\overline{MC}^2.\overline{AB}+\overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}=0. \tag{1}$$

Prenons le point M pour origine des abscisses et soient a, b, c les abscisses de A, B, C. En appliquant la formule (9) du n° 10, la relation (1) s'écrit

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)+(c-b)(a-c)(b-a)=0. \tag{2}$$

Or, les trois premiers termes constituent le développement suivant la troisième colonne du déterminant de Vandemonde (t. I, *Exercices*, Chap. XXIII, Exercice résolu n° 2)

$$\| 1 \quad a \quad a^2 \|. \tag{3}$$

On sait (*loc. cit.*) que ce déterminant est, d'autre part, égal à $(b-a)(c-a)(c-b)$, c'est-à-dire au quatrième terme de (2) changé de signe. L'identité est donc vérifiée.

Généralisation. — Au lieu de prendre M sur $x'x$, on peut le prendre en dehors. La relation (1) subsiste. En effet, projetons M en P sur $x'x$; nous avons

$$\overline{MA}^2=\overline{MP}^2+\overline{PA}^2, \qquad \overline{MB}^2=\overline{MP}^2+\overline{PB}^2, \qquad \overline{MC}^2=\overline{MP}^2+\overline{PC}^2.$$

En portant dans (1), nous pouvons décomposer le premier membre en deux parties. La première s'écrit

$$\overline{MP}^2(\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}).$$

Elle est nulle, en vertu de la formule de Chasles.

La seconde se déduit de (1) en remplaçant M par P. Comme P est sur $x'x$, elle est nulle, d'après ce qui précède.

La relation (1) ainsi généralisée porte le nom de *relation de Stewart.*

2. *Sur une courbe orientée fermée, on considère deux points mobiles* M *et* N, *dont les abscisses curvilignes* x *et* y *vérifient l'équation linéaire*

$$Ax + By + C = 0. \tag{1}$$

Trouver, sur la courbe, un point P *tel que* $\frac{\overset{\frown}{MP}}{\overset{\frown}{NP}} = \text{const.}$

Soit s l'abscisse curviligne de P. Si on le prend pour nouvelle origine, l'équation (1) devient (n° 12)

$$A(s + x' + kL) + B(s + y' + k'L) + C = 0. \tag{2}$$

Si l'on choisit convenablement les déterminations de x' et y', le rapport $\frac{x'}{y'}$ doit devenir constant, sous la seule condition (2). Pour cela, il faut et il suffit que l'équation (2) n'ait pas de terme constant :

$$(A + B)s + (Ak + Bk')L + C = 0.$$

Laissant de côté le cas où $A + B$ serait nul, on a pour abscisse du point P

$$s = -\frac{C}{A + B} - \frac{Ak + Bk'}{A + B}L. \tag{3}$$

Pour avoir toutes les solutions, on doit donner toutes les valeurs entières possibles à k et k'. Mais, si l'on augmente k et k' du même entier m, s est augmenté de $-mL$, ce qui ne change pas le point P. En prenant $m = -k'$, le nouveau k' est nul et l'on voit que la solution générale est encore donnée par

$$s = -\frac{C}{A + B} - k\frac{A}{A + B}L. \tag{4}$$

Pour que deux valeurs de k, soient k et k_1, donnent le même point, il faut et il suffit que $(k - k_1)\frac{A}{A + B}$ soit entier. Ceci n'est pas possible *si* $\frac{A}{A + B}$ *est incommensurable.* Il y a, dans ce cas, une *infinité de solutions.*

Si $\frac{A}{A + B}$ *est, au contraire, égal à la fraction irréductible* $\frac{p}{q}$ $(q > 0)$,

on aura seulement q *solutions*, obtenues en prenant, par exemple,

$$k = 0, 1, 2, \ldots (q-1).$$

3. *Dans un plan orienté, on donne l'axe polaire* Ox *et les demi-droites* Oy *et* Oz, *d'angles polaires respectifs* $27°$ *et* $242°$. *Sur* Oy, *on prend deux points* A *et* B *tels que* $\overline{AB} = +4{,}5$. *Sur* Oz, *on prend les deux points* E *et* F *tels que* $\overline{EF} = -3{,}2$. *On construit le carré* ABCD, *dont le sens de parcours est celui du plan et le triangle équilatéral* EFG, *dont le sens de parcours est inverse de celui du plan. Calculer :*

1° *Les projections orthogonales des côtés et des diagonales du carré sur* Ox ;

2° *Les projections orthogonales des côtés du triangle sur la diagonale* DB (1).

1° Les angles polaires des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ sont respectivement $27°$ et $27° + 90°$. Leur longueur commune est $4{,}5$; leurs projections orthogonales sur Ox sont donc :

$$4{,}5\cos 27° = +4{,}01 ; \qquad 4{,}5\cos(27° + 90°) = -4{,}5\sin 27° = -2{,}04.$$

Les projections de $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont opposées aux précédentes, soit $-4{,}01$ et $+2{,}04$. La projection de $\overrightarrow{AC}$ est la somme algébrique des projections de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, soit $+4{,}01 - 2{,}04 = +1{,}97$. La projection de $\overrightarrow{BD}$ est la somme algébrique des projections de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$, soit $-2{,}04 - 4{,}01 = -6{,}05$.

Comme vérifications, on peut remarquer que les angles polaires de $\overrightarrow{AC}$ et de $\overrightarrow{BD}$ sont $27° + 45° = 72°$ et $72° + 90°$, leur longueur commune étant $4{,}5\sqrt{2} = 6{,}37$. On doit donc avoir :

$$+1{,}97 = 6{,}37\cos 72°$$

et

$$-6{,}05 = 6{,}37\cos(72° + 90°) = -6{,}37\sin 72°,$$

ce qui est bien vérifié, à $0{,}01$ près.

2° Les angles polaires des vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{GE}$ sont respectivement

$$242° - 180° = 62°, \qquad 62° - 120° = -58°, \qquad -58° - 120° = -178°.$$

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

L'angle polaire de $\overrightarrow{DB}$ est $27^\circ - 45^\circ = -18^\circ$. Donc, les angles de $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{GE}$ avec $\overrightarrow{DB}$ sont

$$62^\circ - (-18^\circ) = 80^\circ, \qquad -58^\circ + 18^\circ = -40^\circ, \qquad -178^\circ + 18^\circ = -160^\circ.$$

Les projections demandées sont donc :

$$3,2\cos 80^\circ = 0,558, \quad 3,2\cos 40^\circ = 2,46,$$
$$3,2\cos 160^\circ = -3,2\cos 20^\circ = -3,01.$$

Leur somme algébrique est nulle, conformément au théorème des projections.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Les points M, A, B, C étant pris sur un axe, démontrer la relation

$$\overline{MA}.\overline{BC} + \overline{MB}.\overline{CA} + \overline{MC}.\overline{AB} = 0. \qquad (Cf.\ \text{t. I, n° 319.})$$

2. Les points M, A, B, C, D étant pris sur un axe, démontrer les relations

$$\overline{BC}.\overline{CD}.\overline{DB} - \overline{CD}.\overline{DA}.\overline{AC} + \overline{DA}.\overline{AB}.\overline{BD} - \overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA} = 0,$$
$$\overline{MA}.\overline{BC}.\overline{CD}.\overline{DB} - \overline{MB}.\overline{CD}.\overline{DA}.\overline{AC} + \overline{MC}.\overline{DA}.\overline{AB}.\overline{BD} - \overline{MD}.\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA} = 0,$$
$$\overline{MA}^2.\overline{BC}.\overline{CD}.\overline{DB} - \overline{MB}^2.\overline{CD}.\overline{DA}.\overline{AC} + \overline{MC}^2.\overline{DA}.\overline{AB}.\overline{BD} - \overline{MD}^2.\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA} = 0.$$

[Introduire des déterminants. (*Cf.* Exercice résolu n° 1).]

3. Étant donnés les deux points A et B, trouver, sur la droite qui les joint, un point M tel que $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MA}}$. (C'est ce qu'on appelle *partager le segment* AB *en moyenne et extrême raison.*)

4. Étant donnés les trois points A, B, C sur un axe, trouver un point M sur cet axe tel qu'on ait une des relations

$$\overline{MB}.\overline{MC} + \overline{MC}.\overline{MA} + \overline{MA}.\overline{MB} = 0,$$
$$\overline{MA}^3 + \overline{MB}^3 + \overline{MC}^3 = 3\overline{MA}.\overline{MB}.\overline{MC}.$$

5. Étant donnés deux points A et B sur une courbe fermée orientée, trouver tous les points M pour lesquels $\frac{\widehat{MA}}{\widehat{MB}}$ a une valeur donnée m. Nombres de solutions.

6. Étant données deux demi-droites OA et OB d'angles polaires a et b, trouver une demi-droite Oλ telle que $\left(\widehat{OA, O\lambda}\right) = \left(\widehat{O\lambda, OB}\right)$. (Bissectrice.)

7. Étant données trois demi-droites OA, Oλ, Oλ', d'angles polaires respectifs a, φ, φ', calculer les angles polaires des symétriques OB et OB' de OA par rapport à Oλ et Oλ', ainsi que $\left(\widehat{OB, OB'}\right)$. Cas où O$\lambda$ et Oλ' sont perpendiculaires.

8. Soit un triangle équilatéral OAB. On oriente son périmètre dans le sens OAB et le plan dans le sens de ce périmètre. On oriente la droite $x'x$ qui porte OA suivant le sens de $\overrightarrow{OA}$. Puis, sur le côté OB, on construit un carré OBCD tel que le sens de parcours OBCDO soit celui du plan. Sur CD on construit un triangle isoscèle CED, rectangle en E, également orienté dans le sens du plan. Enfin, sur DE on construit les deux triangles équilatéraux DEF, DEG. Calculer les abscisses des projections orthogonales des points B, C, D, E, F, G sur $x'x$, l'origine étant en O et en supposant $\overline{OA} = 1$.

9. Dans un plan orienté, on donne trois demi-droites OA, OB, OC. Sachant que $\left(\widehat{OB, OC}\right) = a$, $\left(\widehat{OC, OA}\right) = b$, $\left(\widehat{OA, OB}\right) = c$, trouver la relation qui existe entre les projections orthogonales x, y, z d'un vecteur quelconque du plan sur ces demi-droites (prolongées au besoin). Même question en supposant la projection sur chaque demi-droite faite parallèlement à la suivante (ou à la précédente).

CHAPITRE III.

COORDONNÉES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Soient trois axes rectangulaires* $Oxyz$. *On donne dans le plan des* xy *deux points* $A_1(x_1, y_1, 0)$ *et* $A_2(x_2, y_2, 0)$. *Sur le segment* A_1A_2, *on construit un triangle équilatéral* $A_1A_2A_3$ *tel que son périmètre, orienté par les axes, ait pour sens positif le sens* $A_1A_2A_3$. *On fait tourner le triangle de l'angle* θ *autour du vecteur* $\overrightarrow{A_1A_2}$. *Le point* A_3 *vient en* A'_3. *Enfin, on construit sur* $A_1A_2A'_3$ *un tétraèdre régulier dont le quatrième sommet* A_4 *se trouve dans la région positive du plan orienté* $A_1A_2A'_3$. *On demande de calculer les coordonnées des points* A_3, A'_3, A_4 *en fonction de* $x_1, y_1, x_2, y_2, \theta$, *ainsi que les coordonnées du centre de gravité du tétraèdre. On calculera enfin les cosinus directeurs des six arêtes dans l'hypothèse où la longueur* A_1A_2 *égale* 1.

Introduisons comme inconnues auxiliaires la longueur $\rho = A_1A_2$ et l'angle polaire φ du vecteur A_1A_2 dans le plan des xy. Ces inconnues sont liées aux données par les équations

$$(1) \qquad x_2 - x_1 = \rho\cos\varphi, \qquad y_2 - y_1 = \rho\sin\varphi.$$

obtenues par projection sur Ox et sur Oy.

Coordonnées de A_3. — On a $\left(\widehat{A_1A_2, A_1A_3}\right) = \frac{\pi}{3}$. L'angle polaire de A_1A_3 est donc $\varphi + \frac{\pi}{3}$. En projetant le contour OA_1A_3 sur Ox et Oy, nous avons

$$x_3 = x_1 + \rho\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right), \qquad y_3 = y_1 + \rho\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right);$$

$$x_3 = x_1 + \rho\left(\cos\varphi\cos\frac{\pi}{3} - \sin\varphi\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$y_3 = y_1 + \rho\left(\sin\varphi\cos\frac{\pi}{3} + \cos\varphi\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

ou, en tenant compte de (1),

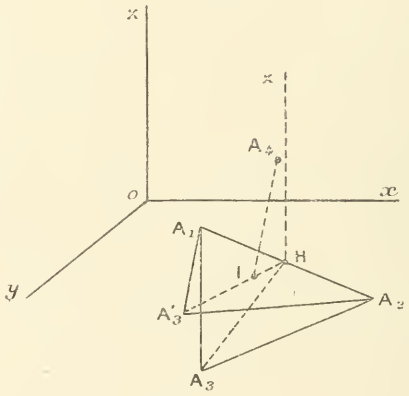
$$x_3 = x_1 + (x_2 - x_1)\cos\frac{\pi}{3} - (y_2 - y_1)\sin\frac{\pi}{3},$$

$$y_3 = y_1 + (y_2 - y_1)\cos\frac{\pi}{3} + (x_2 - x_1)\sin\frac{\pi}{3};$$

$$(2)\qquad x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{(y_1 - y_2)\sqrt{3}}{2}, \qquad y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{(x_2 - x_1)\sqrt{3}}{2}.$$

Coordonnées de A'_3. — Menons les hauteurs A_3H et A'_3H (*fig.* 3). Le

Fig. 3.



vecteur $\overrightarrow{HA_3}$ a pour angle polaire $\varphi + \frac{\pi}{2}$ dans xOy. Prenons cet angle pour longitude de $\overrightarrow{HA'_3}$. Si nous remarquons que le sens positif de rotation défini par le vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ dans le plan perpendiculaire $A_3HA'_3$ est le sens de HA_3 vers Hz, nous pouvons prendre θ pour latitude de $\overrightarrow{HA'_3}$ (n° 30). Dès lors, les cosinus directeurs de $\overrightarrow{HA'_3}$ sont (n° 30)

$$\cos\theta\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right), \qquad \cos\theta\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right), \qquad \sin\theta$$

ou

$$(3)\qquad -\cos\theta\sin\varphi, \quad \cos\theta\cos\varphi, \quad \sin\theta.$$

Quant à la longueur $HA'_3 = HA_3$, elle est égale à $\rho\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Enfin, le point H, milieu de A_1A_2, a pour coordonnées $\frac{x_1+x_2}{2}$, $\frac{y_1+y_2}{2}$, o (n° 23). Si nous projetons alors le contour OHA'_3 sur les axes, nous avons

$$x'_3 = \frac{x_1+x_2}{2} - \rho\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\sin\varphi, \qquad y'_3 = \frac{y_1+y_2}{2} + \rho\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\cos\varphi,$$

$$z'_3 = \rho\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$$

ou, en tenant compte de (1),

$$(4)\qquad \begin{cases} x'_3 = \dfrac{x_1+x_2}{2} + (y_1-y_2)\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta, \\ y'_3 = \dfrac{y_1+y_2}{2} + (x_2-x_1)\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta, \\ z_3 = \rho\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta, \end{cases}$$

avec (n° 161)

$$\rho = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

En faisant $\theta = o$, on retrouve les formules (2).

Coordonnées de A_4. — Soit I le centre de $A_1A_2A_3$. Le vecteur $\overrightarrow{IA_4}$ a pour longueur

$$\rho\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \rho\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Il est perpendiculaire au plan $A_1A_2A_3$. De plus, si l'on amène Oz sur $\overrightarrow{IA_4}$, $\overrightarrow{Oy}$ sur IA'_3, Ox doit prendre la direction et le sens de $\overrightarrow{A_1A_2}$, parce que A_4 est dans la région positive du plan $A_1A_2A'_3$ (n° 27). Il s'ensuit que $\left(\widehat{IA'_3, IA_4}\right) = \frac{\pi}{2}$ dans le plan A_3Hz orienté par $\overrightarrow{A_1A_2}$. Si donc l'on prend encore φ pour longitude, on devra prendre $\theta + \frac{\pi}{2}$ pour latitude de $\overrightarrow{IA_4}$. Les cosinus directeurs de $\overrightarrow{IA_4}$ se déduisent donc de (3) par le changement de θ en $\theta + \frac{\pi}{2}$, ce qui donne

$$(5)\qquad \sin\theta\sin\varphi, \qquad -\sin\theta\cos\varphi, \qquad \cos\theta.$$

Enfin, les coordonnées de I, centre de gravité du triangle $A_1A_2A'_3$ sont (n° 23)

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{(y_1-y_2)\sqrt{3}}{6}\cos\theta, \\ \dfrac{y_1+y_2}{2}+\dfrac{(x_2-x_1)\sqrt{3}}{6}\cos\theta, \\ \rho\dfrac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta. \end{cases}$$

Si nous projetons alors le contour OIA_4 sur les axes, nous avons

$$(7)\qquad \begin{cases} x_4=\dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{(y_1-y_2)\sqrt{3}}{6}\cos\theta+\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sin\theta\,(x_2-y_1) \\ \quad=\dfrac{x_1+x_2}{2}+(y_1-y_2)\mathrm{A}, \\ y_4=\dfrac{y_1+y_2}{2}+\dfrac{(x_2-x_1)\sqrt{3}}{6}\cos\theta+\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sin\theta\,(x_1-x_2) \\ \quad=\dfrac{y_1+y_2}{2}-(x_1-x_2)\mathrm{A}, \\ z_4=\rho\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta+\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cos\theta\right), \end{cases}$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$(8)\qquad \mathrm{A}=\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\theta-\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\theta.$$

Coordonnées du centre de gravité. — Ce sont (n° 23)

$$\frac{x_1+x_2+x'_3+x_4}{4},\qquad \frac{y_1+y_2+y'_3+y_4}{4},\qquad \frac{z'_3+z_4}{4}$$

ou

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{x_1+x_2}{2}+\mathrm{B}(y_1-y_2), \qquad \dfrac{y_1+y_2}{2}-\mathrm{B}(x_1-x_2), \\ \qquad\qquad \rho\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta+\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cos\theta\right), \end{cases}$$

en posant

$$(10)\qquad \mathrm{B}=\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\theta-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\theta.$$

Cosinus directeurs. — Les arêtes ayant pour longueur l'unité, leurs cosinus directeurs sont leurs projections sur les axes, lesquelles sont données par la formule de Chasles, soit

$$\overrightarrow{A_1A_2} : x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1, \quad 0;$$

$$\overrightarrow{A_2A_3'} : \begin{cases} \dfrac{x_1 - x_2}{2} + (y_1 - y_2)\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta, \\ \dfrac{y_1 - y_2}{2} + (x_2 - x_1)\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta, \qquad \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta; \end{cases}$$

$$\overrightarrow{A_3'A_1} : \begin{cases} \dfrac{x_1 - x_2}{2} - (y_1 - y_2)\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta, \\ \dfrac{y_1 - y_2}{2} - (x_2 - x_1)\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta, \qquad -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta; \end{cases}$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} : \begin{cases} \dfrac{x_2 - x_1}{2} + (y_1 - y_2)\Lambda, \qquad \dfrac{y_2 - y_1}{2} - (x_1 - x_2)\Lambda, \\ \dfrac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta + \sqrt{\dfrac{2}{3}}\cos\theta; \end{cases}$$

$$\overrightarrow{A_2A_4} : \begin{cases} \dfrac{x_1 - x_2}{2} + (y_1 - y_2)\Lambda, \qquad \dfrac{y_1 - y_2}{2} - (x_1 - x_2)\Lambda, \\ \dfrac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta + \sqrt{\dfrac{2}{3}}\cos\theta; \end{cases}$$

$$\overrightarrow{A_3'A_4} : (y_1 - y_2)\mathrm{C}, \quad -(x_1 - x_2)\mathrm{C}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta + \sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta,$$

en posant

$$\mathrm{C} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta - \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\theta.$$

2. *Étant donnés deux trièdres trirectangles* $Oxyz$ et $Ox'y'z'$ *de même origine, trouver tous les points qui ont mêmes coordonnées par rapport aux deux trièdres. On supposera successivement les deux trièdres de même espèce, puis d'espèces différentes* (1).

Partons des formules du changement de coordonnées (n° 35) et supposons : $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$. Les coordonnées (anciennes ou nou-

(1) *Cf.* t. 1; *Exerc.*, Chap. XXIV, Exercice proposé n° 3.

velles) des points cherchés doivent vérifier le système

$$(1)\qquad \begin{cases} (a-1)x + a'y + a''z = 0, \\ bx + (b'-1)y + b''z = 0, \\ cx + c'y + (c''-1)z = 0. \end{cases}$$

Premier cas : Trièdres de même espèce. — Le déterminant δ du système (1) est nul. En effet, si on le multiplie par

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix},$$

en faisant le produit colonne par colonne (n° 283) et tenant compte des relations (32) et (33) du n° 35, on retrouve δ, où l'on aurait changé les signes de tous les éléments, c'est-à-dire $(-1)^3\delta = -\delta$. Comme $\Delta = 1$ (n° 35), on a $\delta = -\delta = 0$.

Je dis que, d'autre part, si les trièdres sont distincts, les mineurs du second ordre de δ ne sont pas tous nuls. En effet, en annulant les mineurs relatifs à la diagonale principale, on trouve, en utilisant les formules (39) du n° 35,

$$a + 1 = b' + c'', \qquad b' + 1 = a + c'', \qquad c'' + 1 = a + b'.$$

Or, en ajoutant les deux premières de ces égalités, il vient $c'' = 1$. De même, $a = 1$, $b' = 1$. Ceci n'est possible que si Oz' coïncide avec Oz, Ox' avec Ox et Oy' avec Oy.

Ce cas banal étant écarté, nous voyons, d'après la théorie des équations linéaires homogènes (n° 292), qu'il y a toujours une infinité de solutions, d'ailleurs proportionnelles. Donc, *une infinité de points répondent à la question; ils sont sur une droite* $O\gamma$ *issue de l'origine* (n° 25).

On peut obtenir, sous une forme élégante, *les paramètres directeurs de cette droite* par l'artifice suivant : Multiplions la première équation (1) par a, la seconde par b, la troisième par c et ajoutons; il vient, en tenant compte des relations (32) et (33) du n° 35,

$$(a-1)x + by + cz = 0.$$

Retranchant de la première équation (1), on a

$$(b - a')y = (a'' - c)z.$$

En permutant circulairement les lettres et les accents et supposant

les différences $c'-b'$, $a''-c$, $b-a'$ non toutes nulles, on obtient

$$\frac{x}{c'-b'}=\frac{y}{a''-c}=\frac{z}{b-a'}. \tag{2}$$

Les différences ci-dessus peuvent donc être prises pour paramètres directeurs de $O\lambda$.

On peut d'ailleurs vérifier, et ceci est une nouvelle démonstration de l'existence de $O\lambda$, qu'en les substituant dans (1) à la place de x, y, z, on n'obtient que des identités.

Ceci est en défaut si $c'=b''$, $a''=c$, $b=a'$. Mais alors il suffit de remplacer, dans (1), x, y, z par $1-a$, b, c, ou bien par a', $1-b'$, c', ou bien par a'', b'', $1+c''$. On obtient encore des identités. Donc, $O\lambda$ a des paramètres directeurs proportionnels à l'un quelconque des trois groupes de nombres ci-dessus. On peut d'ailleurs observer que le premier groupe définit la bissectrice de $\left(\widehat{Ox, Ox'}\right)$ (*cf.* Exercice proposé n° 11), le second définit la bissectrice de $\left(\widehat{Oy, Oy'}\right)$ et le troisième la bissectrice de $\left(\widehat{Oz, Oz'}\right)$. Ces trois bissectrices coïncident donc avec $O\lambda$ [1].

---

[1] On peut toutefois se demander si les trois équations $c=b'$, $a''=c$, $b=a'$ jointes aux six relations (32) et (33) du n° 25 ne déterminent pas complètement le trièdre $Ox'y'z'$, la solution unique étant précisément le cas banal de la coïncidence. Il est facile de voir qu'il n'en est rien. Si l'on pose $c'=b'=\alpha$, $a''=c=\beta$, $b=a'=\gamma$, on trouve, en portant ces valeurs dans $b=ca'-ac'$, $a=\frac{\beta\gamma}{\alpha}-1$. De même, $b'=\frac{\gamma\alpha}{\beta}-1$, $c''=\frac{\alpha\beta}{\gamma}-1$.

On a maintenant les neuf cosinus en fonction de α, β, γ. En portant leurs valeurs dans (32) et (33), on constate qu'on obtient l'unique relation

$$\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2=2\alpha\beta\gamma. \tag{1}$$

Il y a donc une infinité de trièdres satisfaisant aux conditions ci-dessus; ils dépendent de deux paramètres, par exemple α et β.

On peut vérifier la relation (1) en posant

$$\alpha=\sin\theta\sin\varphi,\qquad \beta=\sin\theta\cos\varphi,\qquad \gamma=2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

On trouve alors que la bissectrice commune aux trois angles xOx', yOy', zOz' a pour cosinus directeurs $\cos\frac{\theta}{2}\cos\varphi$, $\cos\frac{\theta}{2}\sin\varphi$, $\sin\frac{\theta}{2}$, donc φ pour longitude et $\frac{\theta}{2}$ pour latitude.

On a, de la sorte, les neuf cosinus du trièdre symétrique du trièdre de coordonnées par rapport à une droite $O\lambda$ quelconque.

Deuxième cas : Trièdres d'espèces différentes. — Le déterminant δ n'est plus identiquement nul. Si on le développe suivant la première ligne, en tenant compte des relations telles que $-a = b'c'' - c'b''$ (n° 35), on trouve

$$\delta = 2(a + b' + c'' - 1).$$

Donc, pour qu'il y ait des solutions autres que l'origine, il faut et il suffit qu'on ait

$$a + b' + c'' = 1 \tag{3}$$

ou

$$\cos\widehat{x\mathrm{O}x'} + \cos\widehat{y\mathrm{O}y'} + \cos\widehat{z\mathrm{O}z'} = 1. \tag{4}$$

Cette condition remplie, toute solution de (1) doit vérifier (2), si l'on suppose les différences $c' - b''$, $a'' - c$, $b - a'$ non toutes nulles. Mais, si l'on porte les valeurs (2) dans la première équation (1), on trouve

$$2(b'' - c') = 0.$$

De même, les deux autres équations donnent $a'' - c = 0$, $b - a' = 0$. Ceci nous montre que le système (1) ne peut être vérifié, dans le cas actuel, que si l'on a aussi [1]

$$b'' = c', \qquad a'' = c, \qquad b = a'. \tag{5}$$

Mais alors, il est aisé de vérifier que tous les mineurs du second ordre de δ sont nuls. Les équations (1) se réduisent à une seule. Il y a une

---

[1] Comme tout à l'heure, les équations (5) entraînent

$$a = \frac{\beta\gamma}{\alpha} - 1, \qquad b' = \frac{\gamma\alpha}{\beta} + 1, \qquad c'' = \frac{\alpha\beta}{\gamma} + 1,$$

avec l'unique condition, qui exprime aussi (3),

$$\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 = -2\alpha\beta\gamma, \tag{1}$$

qui permet de poser

$$\alpha = -\sin\theta\sin\varphi, \qquad \beta = -\sin\theta\cos\varphi, \qquad \gamma = -2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

Le trièdre opposé à $\mathrm{O}x'y'z'$ coïncide avec celui de la note précédente (changer les signes de α, β, γ, a, b', c''). On en déduit sans peine que $\mathrm{O}x'y'z'$ est symétrique de $\mathrm{O}xyz$ par rapport au plan perpendiculaire à la droite appelée précédemment $\mathrm{O}\lambda$. Ce plan n'est autre que P, car il est aisé de vérifier que les cosinus directeurs de $\mathrm{O}\lambda$ sont proportionnels aux coefficients de chacune des équations (1).

infinité de points répondant à la question ; ce sont *les points d'un plan* P *passant à l'origine* (n° 85).

Remarques géométriques. — Dans le premier cas, la demi-droite $O\lambda$ fait les mêmes angles avec les demi-droites Ox et Ox', Oy et Oy', Oz et Oz', puisque son point directeur a mêmes coordonnées par rapport aux deux trièdres. Par une rotation convenable de $Ox'y'z'$ autour de $O\lambda$, on peut amener Oz' sur Oz. Ox' et Oy' sont alors dans le plan xOy et font toujours avec $O\lambda$ les mêmes angles que Ox et Oy respectivement. Ceci n'est possible que si Ox' et Oy' coïncident avec Ox et Oy ou bien en sont symétriques par rapport au plan $zO\lambda$. La seconde hypothèse est, d'autre part, inadmissible, car les deux trièdres ne seraient pas de même espèce.

On voit donc qu'*on peut amener* $Ox'y'z'$ *sur* $Oxyz$ *par une rotation autour de* $O\lambda$. Il revient au même de dire que *tout déplacement d'une figure invariable dans lequel un point reste fixe équivaut à une rotation autour d'un certain axe passant par ce point.*

Dans le deuxième, toute demi-droite $O\lambda$ située dans le plan P fait le même angle avec les demi-droites Ox et Ox'. Elle se trouve donc dans le plan bissecteur de $\widehat{xOx'}$, lequel ne peut être, par suite, que le plan P. Le même raisonnement s'appliquant à $\widehat{yOy'}$ et $\widehat{zOz'}$, on voit que les deux trièdres sont symétriques par rapport à P, ce que nous avons, du reste, vérifié analytiquement (note de la page précédente).

En se reportant à la discussion faite plus haut, on voit que, *pour que les deux trièdres* $Oxyz$ *et* $Ox'y'z'$ *soient symétriques l'un de l'autre par rapport à un plan passant par* O, *il faut et il suffit qu'on ait la relation* (4).

3. *Les axes* $Oxyz$ *étant rectangulaires, on donne une demi-droite* $O\lambda$ *et un vecteur* $\overrightarrow{A_1A_2}$ *perpendiculaire à cette demi-droite. On fait tourner* A_1A_2 *autour de* A_1, *dans le plan perpendiculaire à* $O\lambda$, *d'un angle* V *mesuré au moyen du sens positif défini par* $O\lambda$. *Le point* A_2 *vient en* A_3. *Calculer les coordonnées de* A_3, *connaissant celles de* A_1 *et de* A_2 *et les cosinus directeurs* a, b, c *de* $O\lambda$.

Introduisons la demi-droite $O\mu$, qui a même direction et même sens que $\overrightarrow{A_1A_2}$ et la demi-droite $O\nu$ telle que le trièdre $O\lambda\mu\nu$ soit trirectangle et positif. Si (a', b', c') et (a'', b'', c'') sont leurs cosinus directeurs respectifs, on a

$$(1) \qquad \rho a' = (x_2 - x_1), \qquad \rho b' = (y_2 - y_1), \qquad \rho c' = (z_2 - z_1),$$

en appelant ρ la longueur A_1A_2 et (n° 35)

$$(2) \qquad a''=bc'-cb', \qquad b''=ca'-ac', \qquad c''=ab'-ba'.$$

D'autre part, le sens positif défini par $O\zeta$ dans le plan $O\mu\nu$ est celui de $O\mu$ vers $O\nu$. L'angle V est donc l'angle polaire de $\overrightarrow{A_1A_3}$ dans ce plan. Les projections de $\overrightarrow{A_1A_3}$ sur $O\mu$ et $O\nu$ sont, par suite, $\rho\cos V$ et $\rho\sin V$ et l'on a l'égalité géométrique (1)

$$(3) \qquad \overrightarrow{A_1A_3}=\overrightarrow{\rho\cos V_{0\mu}}+\overrightarrow{\rho\sin V_{0\nu}}.$$

Projetant sur Ox, il vient

$$\begin{aligned} x_3-x_1 &= \rho\cos V\,a'+\rho\sin V\,a'' \\ &= \cos V(\rho a')+\sin V(b\rho c'-c\rho b') \\ &= \cos V(x_2-x_1)+\sin V[b(z_2-z_1)-c(y_2-y_1)], \end{aligned}$$

en tenant compte de (1); d'où

$$(4) \quad x_3=x_1(1-\cos V)+x_2\cos V+(y_1-y_2)c\sin V+(z_2-z_1)b\sin V.$$

On aurait y_3 et z_3 par permutations circulaires.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. On donne les coordonnées rectangulaires du centre et d'un sommet d'un triangle équilatéral. Trouver les coordonnées des deux autres sommets, en supposant d'abord qu'on est en Géométrie plane, puis qu'on est dans l'espace et qu'on connaît les cosinus directeurs de la droite perpendiculaire au plan du triangle. (*Cf.* Exercice résolu n° 3.)

2. Les axes Oxy étant rectangulaires, on donne les deux points $A_1(x_1, y_1)$ et $A_2(x_2, y_2)$. Sur A_1A_2 on construit un carré tel que son périmètre soit orienté dans le sens du plan suivant $A_1A_2A_3A_4$. Sur chaque côté, on construit ensuite un triangle équilatéral extérieur au carré. Calculer les coordonnées des sommets de tous ces triangles.

3. Les axes $Oxyz$ étant rectangulaires, on donne deux points $A_1(x_1, o, z_1)$ et $A_2(x_2, o, z_2)$ dans le plan des zx. Sur ces deux points,

(1) Nous désignons par le symbole $\overrightarrow{x_{0\xi}}$ un vecteur parallèle à $O\xi$ et ayant pour mesure algébrique x sur cette demi-droite.

on construit un carré orienté comme dans l'exercice précédent. On fait tourner ce carré de l'angle θ autour du vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$. Sur le carré obtenu et dans la région positive de son plan, on construit un cube. Calculer les coordonnées des sommets de ce cube. (*Cf.* Exercice résolu n° 1.)

4. Connaissant les coordonnées de deux points, trouver les coordonnées du symétrique de l'un d'eux par rapport à l'autre.

5. Connaissant les coordonnées du centre de gravité et de deux sommets d'un triangle, trouver les coordonnées du troisième sommet. Étendre la question à un tétraèdre.

6. Les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre et celles qui joignent chaque sommet au centre de gravité de la face opposée sont sept droites concourantes.

7. Étant donné un pentagone plan ou gauche, les droites joignant le milieu de chaque côté au centre de gravité du triangle formé par les sommets qui ne sont pas les extrémités de ce côté sont cinq droites concourantes. Étendre cette question à un hexagone.

8. Étant donnés les deux points $M_1(+0,7;\ -4,6;\ +2,8)$ et $M_2(-3,6;\ -5,8;\ +1,4)$, calculer les coordonnées du point M tel que $\dfrac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = -1,65$.

9. Calculer les cosinus directeurs des demi-droites $O\lambda$ et $O\lambda'$ définies par les paramètres directeurs $(2,7;\ -3,1;\ -5,3)$ et $(3,\ -8,\ +1)$. Calculer l'angle $V < \pi$ formé par ces demi-droites. Le plan $\lambda O\lambda'$ étant orienté de telle manière que $\left(\widehat{O\lambda,\ O\lambda'}\right) = V$, calculer les cosinus directeurs de la demi-droite $O\mu$ de ce plan définie par $\left(\widehat{O\lambda,\ O\mu}\right) = \varphi$, ainsi que les cosinus directeurs de la demi-droite $O\nu$ perpendiculaire au plan et menée dans sa région positive.

[On calculera les cosinus de $O\mu$, pour $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, en décomposant le vecteur unitaire de $O\lambda'$ suivant $O\lambda$ et $O\mu$.]

10. Connaissant les angles polaires $(\vartheta,\ \varphi)$ d'une demi-droite $O\lambda$, calculer les angles polaires $(\vartheta',\ \varphi')$ de la demi-droite $O\lambda'$ symétrique de $O\lambda$ par rapport à la demi-droite $O\mu$ du plan des xy qui a pour angle polaire, dans ce plan, un angle donné ω.

11. Étant données deux demi-droites par leurs cosinus directeurs, trouver les cosinus directeurs de leurs bissectrices intérieure et extérieure. Appliquer aux demi-droites $O\lambda$ et $O\lambda'$ de l'exercice précédent.

(Faire la somme géométrique des vecteurs unitaires des deux demi-droites proposées.)

12. Étant données trois demi-droites, montrer que les plans passant par chacune d'elles et par la bissectrice des deux autres sont trois plans concourants.

(Somme géométrique des vecteurs unitaires.)

13. Soient une demi-droite $O\lambda$ de cosinus directeurs a, b, c et un point M de coordonnées x, y, z, trouver les coordonnées du point M′ symétrique de M par rapport à $O\lambda$. Même question en remplaçant $O\lambda$ par une droite quelconque parallèle ou par un plan perpendiculaire.

[Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ ont pour somme géométrique le double de la projection orthogonale de $\overrightarrow{OM}$ sur $O\lambda$.]

14. On donne une demi-droite $O\lambda$ par ses cosinus directeurs a, b, c et un point M par ses coordonnées x, y, z. On fait tourner M autour de $O\lambda$ d'un angle θ. Calculer les coordonnées x', y', z' du point M′ obtenu. Montrer que, si l'on pose

$$\cos\frac{\theta}{2}=\rho, \qquad a\sin\frac{\theta}{2}=\lambda, \qquad b\sin\frac{\theta}{2}=\mu, \qquad c\sin\frac{\theta}{2}=\nu,$$

les formules obtenues sont rationnelles en λ, μ, ν, ρ.

Application numérique : $O\lambda$ de l'exercice n° 9; M$(-34, +23, -66)$; $\theta = 58^{\text{grades}}$.

[Comparer à l'Exercice résolu n° 3, en introduisant le point M_1 projection de M sur $O\lambda$. On doit obtenir les formules d'Olinde Rodrigues (t. I, *Exerc.*, Chap. XXIV, Exercice proposé n° 4).]

15. Étant donnés deux systèmes d'axes rectangulaires Oxy et $Ox'y'$ de même orientation, soient z et z' les affixes d'un même point du plan par rapport à ces deux systèmes. Montrer qu'on a $z = z'.e^{i\varphi}$, en posant $\varphi = \left(\widehat{Ox, Ox'}\right)$.

16. Étant donnés deux trièdres trirectangles $Oxyz$ et $Ox'y'z'$ de même espèce, trouver les points dont les coordonnées par rapport aux deux trièdres sont proportionnelles.

[*Cf.* exercice résolu n° 2 et aussi t. I, *Exerc.*, Chap. XXIV, Exercice proposé n° 3. On trouve, outre les points de $O\lambda$ (*loc. cit.*), les points des droites isotropes du plan mené par O perpendiculaire à $O\gamma$. Expliquer géométriquement ce résultat.]

17. Dans tout système de coordonnées, on appelle *lignes* ou *surfaces coordonnées* les lignes ou surfaces le long desquelles deux ou une coordonnées restent constantes. Cela posé, on demande de calculer les angles polaires et les cosinus directeurs des demi-tangentes positives aux lignes coordonnées qui passent par le point $M(\rho, \theta, \varphi)$, dans le système des coordonnées polaires de l'espace, en supposant ces lignes orientées dans le sens où croît la variable qui ne reste pas constante.

18. Le trièdre $Ox'y'z'$ étant défini, par rapport à $Oxyz$, par ses angles d'Euler, θ, φ, ψ, calculer les angles polaires et les cosinus directeurs de Oz' par rapport à $Oxyz$, puis de Oz par rapport à $Ox'y'z'$.

19. On donne les angles d'Euler $\theta = 36°$, $\varphi = 253°$, $\psi = -110°$. Calculer les formules du changement de coordonnées, les cosinus directeurs de l'axe $O\lambda$ et l'amplitude V de la rotation unique qui permet d'amener le premier trièdre sur le second. Calculer enfin toutes les déterminations qu'il est possible de donner aux angles d'Euler sans changer les trièdres. (*Cf.* Exercice résolu n° 2 et proposé n° 14.)

20. Calculer les coordonnées polaires des points $(+2,1\,;\ -6,8)$; $(-3,7\,;\ +8)$; $(+2,+7)$; $(-4,6\,;\ -10.8)$.

21. Étant donnés deux points O et O', on appelle *coordonnées bipolaires* d'un point M les distances $r = OM$ et $r' = O'M$. Établir les formules qui permettent de passer de ce système de coordonnées aux coordonnées polaires de pôle O et d'axe polaire OO' et aux coordonnées cartésiennes rectangulaires dont l'origine est au milieu de OO' et l'axe des x suivant OO'.

CHAPITRE IV.

LIGNES ET SURFACES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Calculer le degré de la surface représentée par l'équation*

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1. \tag{1}$$

Rendons l'équation rationnelle. Ecrivons-la

$$\sqrt{y}+\sqrt{z}=1-\sqrt{x} \tag{2}$$

et élevons au carré

$$y+z+2\sqrt{yz}=1+x-2\sqrt{x}. \tag{3}$$

Isolons le radical $2\sqrt{yz}$ et élevons encore au carré,

$$4yz=(1+x-y-z)^2+4x+4(y+z-x-1)\sqrt{x}. \tag{4}$$

Isolons le terme en $\sqrt{x}$ et élevons encore au carré,

$$16x(y+z-x-1)^2=[(y+z-x-1)^2-4yz+4x)]^2. \tag{5}$$

La surface est du quatrième degré. (*Cf.* Chap. XVIII, Exercice résolu n° 3.)

Remarques. — I. L'équation (1) est symétrique en x, y, z; l'équation (5) doit donc l'être aussi. On le vérifie en développant les calculs et ordonnant. On trouve

$$\begin{aligned}(6)\qquad &(x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy)^2\\ &+4(-x^3-y^3-z^3+x^2y+x^2z+y^2z\\ &+y^2x+z^2x+z^2y-10xyz)+6(x^2+y^2+z^2)\\ &+4(yz+zx+xy)-4(x+y+z)+1=0.\end{aligned}$$

On peut procéder autrement. De l'équation (4), tirons $4\sqrt{x}$, permutons circulairement et ajoutons, en tenant compte de (1),

$$(7)\qquad 4\left(\frac{yz-x}{y-z-x-1}+\frac{zx-y}{z+x-y-1}+\frac{xy-z}{x+y-z-1}\right)=x+y+z+1.$$

En chassant les dénominateurs, on doit retrouver (6).

Autrement, l'équation (4) s'écrit

$$4(2x+1-\mathrm{S})\sqrt{x}=(x-y-z)^2-4yz+6x-2y-2z+1=\mathrm{A}+8x-2\mathrm{S}+1,$$

en posant

$$\mathrm{S}=x+y+z,\qquad \mathrm{A}=x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy.$$

Permutons circulairement et ajoutons, en tenant compte de (1),

$$(8)\qquad 8\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}\right)=3\,\mathrm{A}+6\mathrm{S}-1.$$

D'autre part, multiplions (3) par $4x$, permutons et ajoutons, en tenant toujours compte de (1), il vient

$$4\mathrm{A}-4\mathrm{S}-8\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}\right)=8\sqrt{xyz}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)=8\sqrt{xyz}.$$

En ajoutant à (8), on a l'équation

$$8\sqrt{xyz}=\mathrm{A}-2\mathrm{S}+1$$

qui, élevée au carré, devient

$$(9)\qquad (\mathrm{A}-2\mathrm{S}+1)^2=64xyz.$$

II. Nous sommes assurés que l'équation (1) entraîne les équations équivalentes (5), (6), (7), (9). Mais, la réciproque n'est pas vraie. Pour s'en rendre compte, il suffit d'essayer de remonter la chaîne des équations (5), (4), (3), (2). De (5) à (4), nous obtenons un double signe devant le radical $\sqrt{x}$ et pouvons seulement écrire

$$(4')\qquad 4yz=\left(1+x-y-z+2\varepsilon\sqrt{x}\right)^2,$$

en posant $\varepsilon=\pm 1$. Puis, désignant par ε' une nouvelle unité positive ou négative, indépendante de ε,

$$2\varepsilon'\sqrt{yz}=1-x-y-z+2\varepsilon\sqrt{x}$$

ou

$$(3') \qquad (\sqrt{y} - \varepsilon'\sqrt{z})^2 = (1 + \varepsilon\sqrt{x})^2.$$

Enfin, ε'' étant encore égal à ± 1 et indépendant de ε, ε',

$$(2') \qquad \sqrt{y} - \varepsilon'\sqrt{z} = \varepsilon''(1 + \varepsilon\sqrt{x}).$$

Finalement, l'équation (5) entraîne seulement l'une des équations

$$(1') \qquad \pm\sqrt{x} \pm \sqrt{y} \pm \sqrt{z} = 1,$$

où les doubles signes peuvent être associés arbitrairement.

2. *Quelle est la condition pour que la courbe définie par les équations paramétriques*

$$(1) \qquad x = \cos\varphi, \qquad y = \cos m\varphi$$

soit algébrique? Quel est alors son degré?

Je dis que, *si m est incommensurable, la courbe est transcendante.* Pour le prouver, je vais faire voir que les valeurs de y, qui correspondent à une valeur donnée de x, sont en nombre infini, ce qui ne saurait être si la courbe était algébrique.

En effet, prenons $x = \cos\alpha$. Les valeurs $\varphi = \alpha + 2k\pi$, où k est un entier quelconque, donnent toutes à x la même valeur. Les valeurs correspondantes de y, soit $y_k = \cos(m\alpha + 2km\pi)$, sont les cosinus des arcs terminés aux sommets d'une ligne polygonale régulière dont chaque côté sous-tend $2m\pi$. Ce dernier arc est incommensurable avec la circonférence trigonométrique; donc, la ligne polygonale ne se ferme pas; elle a une infinité de sommets distincts, auxquels correspondent nécessairement une infinité de cosinus et, par suite, une infinité de valeurs de y_k.

Je dis maintenant que, *si m est commensurable, la courbe est algébrique et même unicursale.* En effet, soit $\frac{p}{q}$ la fraction irréductible qui égale m. Si l'on pose $\frac{\varphi}{q} = \psi$, on a

$$x = \cos q\psi, \qquad y = \cos p\psi.$$

On sait, d'autre part (t. III), que ces cosinus peuvent se mettre sous la forme de polynomes en $\cos\psi$, de degrés respectifs q et p. Si donc, on pose $\cos\psi = t$, on voit que la courbe est unicursale et a pour degré le plus grand des deux nombres p et q.

Remarque. — Dans le cas où m est incommensurable, il y a une infinité de valeurs y_k qui approchent tout nombre donné $y < 1$ de moins de ε, si petit que soit ε. Soit, par exemple, $y = \cos\beta$. En vertu de la continuité de la fonction cosinus, il revient au même de dire qu'il existe une infinité de valeurs de k pour lesquelles l'arc $m\alpha + 2km\pi$ approche β, à un multiple de 2π près, de moins de ε. Autrement dit, l'inégalité

$$| m\alpha + 2km\pi - \beta - 2k'\pi | < \varepsilon$$

doit avoir une infinité de solutions entières en k, k'. En divisant par 2π et posant $\frac{\beta - m\alpha}{2\pi} = \Lambda$, on arrive à la proposition suivante :

Étant donnés un nombre irrationnel m, un nombre quelconque Λ et un nombre positif ε aussi petit qu'on veut, il existe une infinité d'entiers k, k' vérifiant l'inégalité

$$| km - k' - \Lambda | < \varepsilon.$$

Or, c'est là une proposition bien connue de la théorie des nombres [1].

---

[1] Voici une démonstration élémentaire de cette propriété, qui nous a été communiquée par M. Châtelet.

Étudions les nombres $X = km - k'$. X ne peut être nul que si $k = k' = 0$, car m ne peut être égal à $\frac{k'}{k}$, parce qu'irrationnel. *Deux* X *sont différents*, dès que leurs nombres constitutifs k et k' le sont, car leur différence est un X.

Il y a une infinité de X *entre* 0 *et* 1, obtenus en donnant à k toutes les valeurs possibles et prenant k' égal à la partie entière de km.

Il y a une infinité de X *de valeur absolue* $< \varepsilon$. Soit, en effet, un entier N, tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Partageons l'intervalle (0, 1) en N intervalles égaux à $\frac{1}{N}$. Dans l'un au moins de ceux-ci, il y a une infinité de X, puisqu'il doit y en avoir une infinité dans leur ensemble (0, 1). Si nous retranchons les X dudit intervalle de l'un d'entre eux, nous obtenons une infinité de nouveaux X tous inférieurs en valeur absolue à $\frac{1}{N}$, donc à ε.

Je dis que, parmi ces X, *il y en a une infinité constitués par des nombres k et k' premiers entre eux.* En effet, si k et k' ne sont pas premiers entre eux, en les divisant par leur plus grand commun diviseur δ, on est conduit à un nombre $X_0 = \frac{X}{\delta}$ de valeur absolue évidemment plus petite que ε. Les X de l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ sont donc des multiples des X_0 du même intervalle à nombres constitutifs premiers entre eux. Si les X_0 étaient en nombre fini, leurs multiples seraient visiblement en nombre fini dans l'intervalle considéré, ce qui n'est pas.

Je dis maintenant qu'*à tout* X_0 *on peut faire correspondre un* X *approchant* A *de moins de* ε. Il suffit de prendre pour X la valeur approchée pX_0 de A à X_0 près par défaut. Comme $|X_0| < \varepsilon$, on a, *a fortiori*, $|A - X| < |X_0| < \varepsilon$.

Les X ainsi obtenus sont tous différents et par suite, en nombre infini, car si deux

On peut conclure de ce qui précède la curieuse propriété suivante de la courbe (1) :

Étant choisi arbitrairement un point P *dans le carré qui a pour centre* O *et dont les côtés sont parallèles aux axes et ont pour longueur* 2, *il existe une infinité d'arcs de la courbe qui passent à une distance de* P *inférieure à toute longueur donnée.*

Il suffit, en effet, de considérer les arcs qui passent par les points (x_k, y_k) précédents, en prenant pour $x = \cos\alpha$ et $y = \cos\beta$ les coordonnées du point P.

3. *Équation d'une section plane dans son plan.* — Soit une surface (S) définie par l'équation

$$f(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

On la coupe par un plan P et l'on veut avoir l'équation de la section par rapport à des axes situés dans ce plan. La méthode générale consiste à faire un changement de coordonnées tel que le nouveau plan des xy, par exemple, soit parallèle à P. La solution est ensuite évidente.

Bornons-nous à considérer le cas des axes rectangulaires.

Si α, β, γ sont les paramètres directeurs de la perpendiculaire Oz' à P, on calcule les cosinus correspondants a'', b'', c'' (n° 25). Puis on prend un axe Ox' perpendiculaire à Oz' et qu'on peut, pour simplifier, choisir dans un des anciens plans de coordonnées, par exemple dans xOy. On a alors $c = 0$ et $a''a + b''b = 0$; on en déduit a, b, c. Enfin, on a $a' = b''c - c''b$; etc. On n'a plus qu'à remplacer, dans (1), x, y, z par les formules (31) du n° 35.

Il peut arriver que l'on connaisse les angles polaires θ, φ de Oz'. Dans ce cas, on peut faire le changement de coordonnées par les formules

---

d'entre eux $p\mathrm{X}_0$ et $p'\mathrm{X}_0$ étaient égaux, on aurait, en désignant par (x_0, y_0) et (x'_0, y'_0) les nombres constitutifs de X_0 et X'_0,

$$px_0 = p'x'_0, \quad py_0 = p'y'_0;$$

d'où

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{x'_0}{y'_0},$$

ce qui entraînerait $x_0 = x'_0$ et $y_0 = y'_0$, puisque les deux fractions sont irréductibles.

Finalement, nous avons bien prouvé qu'il y avait une infinité de X tels que $|\mathrm{X} - \mathrm{X}| < \varepsilon$.

Le lecteur, qu'intéresserait ces sortes de considérations, lira avec fruit l'Ouvrage de M. Chatelet : *Leçons sur la Théorie des nombres* (Gauthier-Villars).

d'Euler (n° 36), en prenant θ pour angle de nutation, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ pour angle de précession et zéro pour angle de rotation propre.

4. *Former les équations des cylindres projetant la courbe* C :

$$xyz - x^2 - y^2 - z^2 = 0, \tag{1}$$

$$x^2 - x + y + z = 0. \tag{2}$$

Projection sur xOy. — Nous éliminons z, en tirant cette variable de (2) et portant dans (1) :

$$xy(x^2 - x - y) - x^2 + y^2 - (x^2 - x - y)^2 = 0$$

ou

$$x[x^2(y - x) - y^2 - xy - 2x^2 - 2y] = 0. \tag{3}$$

La courbe se décompose en Oy et une courbe du troisième degré. Ceci nous prouve que la courbe C de l'espace se décompose aussi, l'un des éléments de décomposition devant se trouver dans le plan des yz. Effectivement, si l'on fait $x = 0$ dans les équations (1) et (2), elles se réduisent respectivement à

$$z^2 - y^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad y + z = 0.$$

La seconde bissectrice de l'angle yOz appartient à la courbe C.

Projection sur xOz. — Nous éliminons y et trouvons, par un calcul analogue au précédent,

$$x[x^2(x + z) - 2x^2 - z^2 + 3zx - 2z] = 0. \tag{4}$$

La courbe se décompose encore, comme nous pouvions cette fois nous y attendre, en Oz et une courbe du troisième degré.

Projection sur yOz. — Nous éliminons x. Les deux équations sont du second degré par rapport à cette variable. Nous appliquons donc la formule (14) du n° 234 du Tome I :

$$(y - z - y^2 - z^2)^2 + (1 - xyz)(y + z)(yz - y - z) = 0.$$

D'après ce que nous savons, le premier membre doit renfermer $y + z$ en facteur. Effectivement, le premier terme s'écrit $(y + z)^2(1 + z - y)^2$. Si nous supprimons ce facteur, il reste l'équation du cinquième degré

$$(y - z)(z - y - 1)^2 + (xyz - 1)(yz - y - z) = 0. \tag{5}$$

Remarque. — La courbe C est du sixième degré (n° 52). Si l'on enlève la seconde bissectrice de yOz, il reste une courbe du cinquième degré, qui se projette suivant des cubiques sur xOy et xOz et suivant une courbe du cinquième degré sur yOz. Elle ne peut pas être représentée isolément par deux équations implicites, puisque son degré est premier (n° 52).

5. *Condition de rencontre des deux lignes :*

$$(1)\qquad x^2+y^2-z^2-2\alpha x-2\beta y-h^2=0, \qquad \frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}=0,$$

$$(2)\qquad x^2+y^2+z^2=R^2, \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Il faut que ces quatre équations en x, y, z soient compatibles. En tenant compte de la première (2), la première (1) s'écrit

$$2\alpha x+2\beta y=R^2-h^2.$$

En la combinant avec la deuxième (1), on peut calculer x et y :

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{R^2-h^2}{2(\alpha^2+\beta^2)},$$

d'où

$$(3)\qquad x=k\alpha, \qquad y=k\beta,$$

en posant

$$(4)\qquad k=\frac{R^2-h^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}.$$

Portant dans (2), il vient

$$(5)\qquad \begin{cases} k^2(\alpha^2+\beta^2)+z^2=R^2, \\ k^2\left(\dfrac{\alpha^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}\right)-\dfrac{z^2}{c^2}=0. \end{cases}$$

Ces deux équations doivent être compatibles en z. En multipliant la seconde par c^2 et ajoutant à la première, on obtient la condition cherchée :

$$k^2\left[\alpha^2\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)+\beta^2\left(1+\frac{c^2}{b^2}\right)\right]=R^2$$

ou, en remplaçant k par (4),

$$(6)\qquad 4R^2(\alpha^2+\beta^2)^2=(R^2-h^2)^2\left[\alpha^2\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)+\beta^2\left(1+\frac{c^2}{b^2}\right)\right].$$

Si cette condition est remplie, les deux courbes se rencontrent en deux points symétriques par rapport à xOy et dont les coordonnées sont données par (3) et l'une ou l'autre des équations (5).

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Calculer les degrés des courbes

$$x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = 1, \qquad x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}} = 1, \qquad x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} = 1, \qquad x^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{1}{m}} = 1.$$

2. Calculer les degrés des surfaces

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = z, \qquad x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{m}} = z.$$

3. Calculer les équations implicites des courbes suivantes :

$$r = \cos 2\varphi, \qquad y = \operatorname{tang}\varphi; \qquad x = \operatorname{tang}\varphi, \qquad y = \sin\varphi;$$

$$x = \sin\varphi, \qquad y = \cos\frac{\varphi}{2};$$

$$x = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}, \qquad y = \operatorname{tang}\varphi \qquad (\varphi = \text{paramètre}).$$

4. Même question pour les courbes

$$x = \sqrt{t+1} + t, \qquad y = \sqrt{2x-2-t};$$

$$x = \sqrt{\cos\varphi} - \cos 2\varphi, \qquad y = \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}.$$

5. Condition pour que la courbe, qui a pour équations paramétriques

$$x = \cos(at - b), \qquad y = \cos(a't - b'),$$

soit algébrique. (*Cf.* Exercice résolu n° 2.)

6. Trouver les équations, dans leur plan, des sections planes suivantes :

1° $$2(x-y)\left(z\sqrt{6} + 3x + 3y\right) + 5z^2 - 6xy = 1,$$

par le plan mené par O perpendiculairement à la droite d'angles polaires $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\vartheta = \frac{\pi}{3}$;

2° $$(2x - y + z)^2(x^2 - y^2 - z^2) - 3x^2 - 7y^2 - z^2 - 4 = 0,$$

par le plan

$$2x - y + z = 2.$$

7. Projections sur les plans de coordonnées des courbes suivantes :

(I) $x^2 + y^2 - z^2 = 1, \qquad x^2 + 2y^2 + 2x - 3z = 0;$

(II) $x^3 + y^3 = x + y - z, \qquad x^2 - y^2 = z;$

(III) $(x^2 - y^2 - z^2)^2 + x^2 - y^2 = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 1 = 0.$

8. Trouver l'équation implicite de la surface définie par les équations paramétriques

$$x = \frac{u^2 + v^2 + 1}{uv}, \qquad y = \frac{u^2 - v^2 + 1}{uv}, \qquad z = \frac{u - 1}{uv}.$$

9. Calculer les coordonnées des points de rencontre de la surface

$$mz^2 - yz + xy - 4my - (6m + 1)z + 5m = 0$$

avec la courbe définie par les équations paramétriques

$$x = \operatorname{tang}\varphi, \qquad y = \cos\varphi, \qquad z = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}.$$

Montrer qu'il existe une valeur de m pour laquelle la courbe est sur la surface.

10. Quelle valeur doit-on donner à m pour que les deux lignes

(1) $$\begin{cases} 3(x^2 + y^2) + m(z - 6x - 6y) + 3 - 3m^2 = 0, \\ m(x + y) + 3z^2 - 3 = 0; \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} x + y + z = m, \\ x^2 + y^2 + z^2 = m^2 \end{cases}$$

se rencontrent ? Calculer, dans cette hypothèse, les coordonnées des points d'intersection.

11. Trouver la condition de rencontre des deux lignes

$$x = x_0 + a\cos\varphi + a'\sin\varphi, \qquad y = y_0 + b\cos\varphi + b'\sin\varphi,$$
$$z = z_0 + c\cos\varphi + c'\sin\varphi;$$
$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

12. Quelle valeur doit-on donner à m pour que les deux lignes

$$x = \frac{t+1}{t-1}, \qquad y = t^2 + 1, \qquad z = \frac{t-2}{t-1};$$

$$x = 1 + 6\theta, \qquad y = 15 - 3m + 9(90 - 17m), \qquad z = m\theta$$

se rencontrent? Coordonnées du point de rencontre.

CHAPITRE V (1).

LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Équations de l'ellipse et de l'hyperbole.* — Étant donnés deux points F et F′ de distance $2c$ et une longueur $2a > 2c$, l'ellipse qui a pour foyers F et F′ et $2a$ pour grand axe, est définie, comme on sait, par la condition

$$\text{MF} + \text{MF}' = 2a. \tag{1}$$

Prenons pour origine le milieu de FF′, pour axe des x la droite FF′ et un axe des y perpendiculaire et cherchons l'équation de l'ellipse par rapport à ces axes. Nous appliquons la *méthode directe* (n° 58). Soient x, y les coordonnées du point M. On a (n° 161)

$$\text{MF} = r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \qquad \text{MF}' = r' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \tag{2}$$

Portons dans (1); nous avons tout de suite l'équation demandée :

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a. \tag{3}$$

Pour la rendre entière, isolons un radical

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}; \tag{4}$$

puis élevons au carré; il vient, en simplifiant,

$$-4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \tag{5}$$

ou

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx. \tag{6}$$

(1) Ne faire les Exercices de ce Chapitre qu'après avoir lu les Chapitres VI, VII, XI et XII.

Élevons une nouvelle fois au carré; nous trouvons, tous calculs faits,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1 = 0. \tag{7}$$

Il s'agit de voir maintenant si l'équation (7) est bien équivalente à (3), malgré les élévations au carré. A cet effet, remontons la chaîne des équations (7) à (3). L'équation (7) n'entraîne (6) ou (5) que si

$$a^2 + cx > 0. \tag{8}$$

Puis, (5) n'entraîne (4) ou (3) que si

$$2a > \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \tag{9}$$

Or, nous avons supposé $a > c$; il en résulte, d'après (7), que

$$\frac{x^2}{a^2} < 1, \qquad |x| < a, \qquad |cx| < ac < a^2,$$

ce qui entraîne nécessairement (8). L'équation (6) est donc vérifiée. On en tire

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{cx}{a} < a + \frac{a^2}{a} = 2a, \tag{10}$$

c'est-à-dire (9). Finalement, (7) *équivaut bien à* (3) *et représente l'ellipse.*

Voyons maintenant ce qu'elle représente, *dans l'hypothèse* $a < c$. D'après (7), nous avons

$$\frac{x^2}{a^2} > 1, \qquad |x| > a, \qquad |cx| > ca > a^2.$$

Donc, $a^2 + cx$ a le signe de cx, c'est-à-dire de x.

Si $x > 0$, on a (8), donc (6); donc

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{cx}{a} > a + \frac{a^2}{a} = 2a. \tag{11}$$

Dès lors, (9) n'étant pas vérifié, on a, non pas (4), mais

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - 2a, \tag{12}$$

c'est-à-dire

$$r' - r = 2a. \tag{13}$$

Si $x < 0$, on a, au lieu de (6),

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = -a^2 - cx \tag{14}$$

ou, au lieu de (5),

$$-4cx = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

ou

$$r^2 = (2a + r')^2. \tag{15}$$

D'autre part, d'après (14), on a

$$r' = -a - \frac{cx}{a};$$

donc,

$$2a + r' = a - \frac{cx}{a} > 0$$

puisque $x < 0$; donc, (15) entraîne

$$r = 2a + r$$

ou

$$r - r' = 2a. \tag{16}$$

Les équations (13) et (16) définissent les deux branches de l'hyperbole qui a pour foyers F et F' et pour axe transverse $2a$. Nous voyons donc, en définitive, que *l'équation* (7) *représente toujours une ellipse si* $a > c$, auquel cas on pose $a^2 - c^2 = b^2$, l'équation (7) devenant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{17}$$

Si $a < c$, *elle représente toujours une hyperbole;* on pose

$$c^2 - a^2 = b^2$$

et l'équation s'écrit

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{18}$$

2. *Soient une droite fixe* Δ *et un point fixe* O *extérieur à cette droite. Un angle de grandeur constante* $\widehat{AOB}$ *tourne autour de son sommet* O. *Ses côtés rencontrent* Δ *en* A *et* B. *Trouver le lieu des points de rencontre* M *des perpendiculaires* AM *à* OA *et* BM *à* OB.

Prenons pour origine le point O, l'axe des x perpendiculaire et l'axe des y parallèle à Δ. Soit $x = a$ l'équation de Δ.

Nous allons former les équations des droites AM et BM en fonction d'un paramètre. Il s'agit d'abord de choisir ce paramètre. Si nous connaissions les angles polaires de OA et de OB (arbitrairement orientées), nous aurions facilement les équations de AM et de BM sous la forme normale (n° 65). D'autre part, il est avantageux de ne pas détruire la symétrie des rôles joués par OA et OB. Dès lors, appelons $\varphi - V$ l'angle polaire de OA et $\varphi + V$ celui de OB; de sorte que

$$\left(\widehat{OA, OB}\right) = \varphi + V - (\varphi - V) = 2V \quad (^1).$$

En projetant le vecteur $\overrightarrow{OA}$ sur Ox, nous avons

$$a = \overline{OA}\cos(\varphi - V);$$

d'où

$$\overline{OA} = \frac{a}{\cos(\varphi - V)}.$$

L'équation de AM s'écrit, dès lors,

$$(1) \qquad x\cos(\varphi - V) + y\sin(\varphi - V) - \frac{a}{\cos(\varphi - V)} = 0.$$

Celle de BM s'en déduit par le changement de V en $-V$:

$$(2) \qquad x\cos(\varphi + V) + y\sin(\varphi + V) - \frac{a}{\cos(\varphi + V)} = 0.$$

Deux méthodes se présentent maintenant : celle de l'élimination et celle des équations paramétriques. Nous les emploierons successivement toutes les deux, en commençant par la seconde, qui nous paraît la plus simple.

Méthode des équations paramétriques. — Nous résolvons le système (1), (2) par rapport à x, y; on trouve sans difficulté, en faisant les combinaisons linéaires $(1)\sin(\varphi + V) - (2)\sin(\varphi - V)$ et $-(1)\cos(\varphi + V) + (2)\cos(\varphi - V)$,

$$(3) \quad \begin{cases} x = \dfrac{a\cos 2\varphi}{\cos(\varphi + V)\cos(\varphi - V)} = \dfrac{a\cos 2\varphi}{\cos^2\varphi\cos^2 V - \sin^2\varphi\sin^2 V}, \\ y = \dfrac{a\sin 2\varphi}{\cos(\varphi + V)\cos(\varphi - V)} = \dfrac{a\sin 2\varphi}{\cos^2\varphi\cos^2 V - \sin^2\varphi\sin^2 V}. \end{cases}$$

(1) φ est l'angle polaire de la bissectrice.

Si l'on pose $\operatorname{tang}\varphi = t$, on a aussi

$$(4) \qquad x = \frac{a(1-t^2)}{\cos^2 V - t^2 \sin^2 V}, \qquad y = \frac{2at}{\cos^2 V - t^2 \sin^2 V}.$$

Le lieu est donc une courbe du second degré (n° 563).

Le changement de t en $-t$ montre qu'il admet Ox pour axe de symétrie, ce qui était du reste évident *a priori*. Les sommets de cet axe sont obtenus pour $t = 0$ et $t = \infty$; leurs abscisses sont $\frac{a}{\cos^2 V}$ et $\frac{a}{\sin^2 V}$. Leur milieu, qui est le centre de la conique, a pour abscisse $\frac{a}{2\sin^2 V \cos^2 V}$. Enfin, les formules (3) nous montrent que les directions asymptotiques (n° 230) sont données par $\varphi \pm V = \frac{\pi}{2}$; elles ont pour angles polaires $-2V$ et $+2V$. En les menant par le centre, on a les asymptotes.

Finalement, *le lieu est une hyperbole, dont nous connaissons les asymptotes et les sommets réels.*

Dans le *cas particulier où* $V = \frac{\pi}{4}$, $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$, les sommets sont confondus et ont pour abscisse commune $2a$. Les asymptotes sont également confondues avec la parallèle Δ' à Oy menée par le sommet double. L'hyperbole se réduit à cette droite Δ', homothétique de Δ par rapport à O et dans le rapport 2. Ce résultat est d'ailleurs évident géométriquement.

Méthode par élimination. — Il s'agit d'éliminer φ entre (1) et (2). L'équation (1) s'écrit

$$\begin{aligned} &x(\cos\varphi\cos V + \sin\varphi\sin V)^2 \\ &\quad + y(\sin\varphi\cos V - \sin V\cos\varphi) \\ &\qquad \times(\cos\varphi\cos V + \sin\varphi\sin V) - a(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 0 \end{aligned}$$

ou, en divisant par $\cos^2\varphi$ et posant toujours $\operatorname{tang}\varphi = t$,

$$(5) \qquad \begin{aligned} x(\cos V + t\sin V)^2 + y(t\cos V - \sin V) \\ \times(\cos V + t\sin V) - a(1+t^2) = 0. \end{aligned}$$

On aurait l'équation (5′) de BM en changeant V en $-V$. Mais, il est avantageux de remplacer le système (5), (5′) par les deux équations qu'on en déduit par addition et soustraction, lesquelles peuvent être écrites directement, en annulant séparément les termes de degré pair et

les termes de degré impair en $\sin V$:

$$\begin{cases} x(\cos^2 V + t^2 \sin^2 V) + y t(\cos^2 V - \sin^2 V) - a(1 + t^2) = 0, \\ 2tx + y(t^2 - 1) = 0 \quad (1) \end{cases}$$

ou

$$(6) \qquad \begin{cases} t^2(x \sin^2 V - a) + t y \cos 2V + x \cos^2 V - a = 0, \\ t^2 y + 2tx - y = 0. \end{cases}$$

Éliminons t entre ces deux équations du second degré (t. I, n° 234) :

$$y^2(x - 2a)^2 - (2x^2 \sin^2 V - 2xa - y^2 \cos 2V) \times (-y^2 \cos 2V - 2x^2 \cos^2 V - 2xa) = 0.$$

Nous obtenons une équation du quatrième degré. Or, nous avons vu plus haut que le lieu était du second degré. Nous devons donc avoir en facteur une *solution singulière* (2). Effectivement, si l'on développe et si l'on ordonne par groupes homogènes, on obtient

$$(x^2 + y^2)(x^2 \sin^2 2V - y^2 \cos^2 2V - 4ax + 4a^2) = 0.$$

Notre équation se décompose en

$$(7) \qquad x^2 \sin^2 2V - y^2 \cos^2 2V - 4ax + 4a^2 = 0.$$

qui représente l'hyperbole trouvée précédemment, et

$$(8) \qquad x^2 + y^2 = 0,$$

qui représente *les droites isotropes du point* O (n° 164), *lesquelles doivent donc constituer la solution singulière.*

Effectivement, cherchons la racine commune aux deux équations (6) en t (n° 59). En éliminant t^2, nous avons

$$(9) \qquad t = \frac{y(2a - x)}{y^2 \cos 2V + 2ax - 2x^2 \sin^2 V}.$$

---

(1) Cette équation est indépendante de V. Elle représente une droite passant à l'origine et d'angle polaire 2φ. Ceci nous montre que

$$(\widehat{Ox, OM}) = (\widehat{Ox, OA}) + (\widehat{Ox, OB}),$$

propriété d'ailleurs facile à vérifier géométriquement.

(2) Ce n'est pas une solution étrangère, car notre élimination a été faite au moyen du résultant et non par des combinaisons linéaires (t. I, n° 231).

Si l'on suppose $y = ix$, on trouve

$$t = \frac{i(2a - x)}{2a - x} = i,$$

quantité constante. Pour cette valeur de t, les quatre droites OA, OB, AM, BM sont confondues avec la droite isotrope $y = ix$.

Au reste, ceci est facile à expliquer géométriquement. Les droites AM et BM se confondent s'il en est ainsi des droites OA et OB. Or, celles-ci sont les rayons homologues de deux faisceaux homographiques dont les rayons doubles sont les droites isotropes du point O (n° 164). Donc, OA et OB ne peuvent se confondre que suivant une de ces isotropes, auquel cas AM et BM sont aussi confondues avec cette même droite, puisqu'une isotrope est à elle-même sa propre perpendiculaire (n° 164).

3. *On donne deux droites* Ox *et* Oy *et un point* P *dans leur plan. Par ce point, on mène deux sécantes variables quelconques* PAB, PA′B′. *Trouver le lieu du point de rencontre des droites* AB′ *et* BA′.

Prenons Ox et Oy pour axes de coordonnées. Soient (x_0, y_0) les coordonnées du point P. Pour plus de symétrie, introduisons les quatre paramètres

$$\alpha = \overline{OA}, \qquad \beta = \overline{OB}, \qquad \alpha' = \overline{OA'}, \qquad \beta' = \overline{OB'}.$$

Les équations de AB, A′B′ sont (n° 70)

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0, \qquad \frac{x}{\alpha'} + \frac{y}{\beta'} - 1 = 0.$$

En exprimant qu'elles sont vérifiées par les coordonnées du point P, nous avons les deux conditions

$$(1) \qquad \frac{x_0}{\alpha} + \frac{y_0}{\beta} - 1 = 0, \qquad \frac{x_0}{\alpha'} + \frac{y_0}{\beta'} - 1 = 0.$$

D'autre part, les équations des droites AB′ et BA′ s'écrivent

$$(2) \qquad \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta'} - 1 = 0, \qquad \frac{x}{\alpha'} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0.$$

Pour avoir l'équation du lieu, il faut éliminer α, β, α', β' entre les quatre équations (1) et (2). Nous avons autant de paramètres que d'équations, ce qui était du reste à prévoir, car les droites AB′ et BA′

dépendent de deux paramètres indépendants. On se trouve donc dans le cas singulier signalé au n° 60. Pour reconnaître s'il y a véritablement un lieu, essayons de résoudre le système (1), (2) par rapport à α, β, α', β' (n° 60).

Retranchons les deuxièmes équations (1) et (2) des premières :

$$(3)\quad x_0\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha'}\right)+y_0\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta'}\right)=0,\qquad x\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha'}\right)-y\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta'}\right)=0.$$

Si le déterminant xy_0+yx_0 n'est pas nul, on a

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha'}=\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta'}=0.$$

Le système est compatible, comme le vérifie aisément le lecteur; mais, $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$; les droites PAB, PA'B', AB', A'B sont confondues, ce que nous ne devons pas admettre. Si donc on veut que les droites PA, PA' soient distinctes, il faut avoir

$$(4)\qquad xy_0+yx_0=0.$$

Cette condition étant remplie, il est aisé de constater que le système (1), (2) admet une infinité de solutions en $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\alpha'}$, $\frac{1}{\beta'}$.

Finalement, le lieu existe bien et a pour équation l'équation (4) ou

$$(5)\qquad \frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}=0,$$

qui représente une droite issue de O et conjuguée harmonique de OP par rapport à Ox, Oy (n° 133).

4. *Lieu des segments de grandeur constante qui s'appuient sur deux droites données de l'espace.*

Les deux droites données D et D' jouent le même rôle. Il faut donc prendre des axes ne détruisant pas leur symétrie. Voici comment on procède.

Prenons pour axe des z la perpendiculaire commune, l'origine étant équidistante des deux droites. Puis, prenons pour axes des x et des y les bissectrices des parallèles à D et D' menées par O (*fig.* 4).

La position de D, par rapport au trièdre trirectangle ainsi obtenu, se définit par $\overline{OA}=h$ et $\left(\widehat{Ox,\ D}\right)=\alpha$. Cela nous oriente du même coup

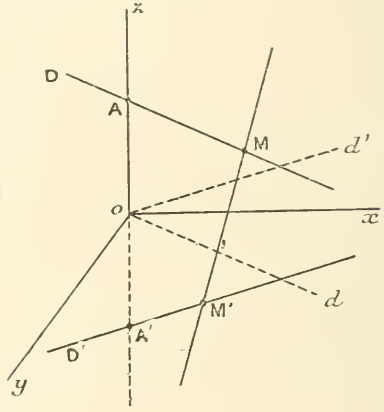
la droite, ce qui peut toujours être utile. Pour D′, il suffit de changer h en $-h$ et α en $-\alpha$ (1).

Cela posé, définissons le segment MM′ par

$$\overline{AM} = \rho, \qquad \overline{A'M'} = \rho'.$$

Ces deux paramètres ρ et ρ' sont liés par la relation qui exprime

Fig. 4.



que MM′ a la longueur donnée, que nous appellerons $2l$. Les coordonnées de M et de M′ sont

$$M(\rho\cos\alpha,\ \rho\sin\alpha,\ h), \quad M'(\rho'\cos\alpha,\ -\rho'\sin\alpha,\ -h).$$

Nous avons donc (n° 177)

$$(\rho-\rho')^2\cos^2\alpha+(\rho+\rho')^2\sin^2\alpha+4h^2=4l^2. \tag{1}$$

Cherchons maintenant les équations de la droite MM′. A cet effet, nous allons prendre, par exemple, les équations des plans (D, M′) et (D′, M). La première est de la forme (n° 99)

$$(x\sin\alpha-y\cos\alpha)+\lambda(z-h)=0, \tag{2}$$

(1) Le système d'axes que nous venons de définir est fréquemment employé. Quand les deux droites ne sont pas parallèles et qu'on ne tient pas à l'orthogonalité des axes, ou quand les deux droites sont perpendiculaires, on peut aussi prendre Ox parallèle à D et Oy parallèle à D′.

avec la condition

$$\rho' \sin\alpha\cos\alpha = \lambda h. \tag{3}$$

qui exprime que (2) contient M'. De (3), on tire λ. En portant dans (2), on a l'équation du plan (D, M'). En changeant h en $-h$, α en $-\alpha$, ρ en ρ', on a l'équation du plan (D', M). Finalement, les équations de MM' sont

$$\begin{cases} h(x\sin\alpha - y\cos\alpha) + \rho'(z-h)\sin\alpha\cos\alpha = 0, \\ h(x\sin\alpha + y\cos\alpha) - \rho(z+h)\sin\alpha\cos\alpha = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Nous aurons l'équation du lieu en éliminant ρ, ρ' entre (1) et (4). Rien n'est plus facile. De (4), nous tirons

$$\rho = \frac{h}{z+h}\left(\frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha}\right), \qquad \rho' = \frac{h}{h-z}\left(\frac{x}{\cos\alpha} - \frac{y}{\sin\alpha}\right);$$

$$\rho - \rho' = \frac{2h}{h^2 - z^2}\left(\frac{hy}{\sin\alpha} - \frac{zx}{\cos\alpha}\right), \qquad \rho + \rho' = \frac{2h}{h^2 - z^2}\left(\frac{hx}{\cos\alpha} - \frac{zy}{\sin\alpha}\right).$$

Portant dans (1), nous avons, en divisant par $\frac{4h^2}{(h^2-z^2)^2}$,

$$(zx - hy\cot\alpha)^2 + (zy - hx\tan\alpha)^2 = \left(\frac{l^2}{h^2} - 1\right)(z^2 - h^2)^2. \tag{5}$$

Telle est l'équation du lieu. Elle représente une surface du quatrième degré, dont les sections par les plans parallèles à xOy sont des ellipses.

On peut aussi calculer *les équations paramétriques du lieu.* Les paramètres directeurs de MM' sont (n° 25)

$$(\rho - \rho')\cos\alpha, \quad (\rho + \rho')\sin\alpha, \quad 2h.$$

Le milieu de MM' a pour coordonnées (n° 23)

$$\frac{\rho + \rho'}{2}\cos\alpha, \quad \frac{\rho - \rho'}{2}\sin\alpha, \quad 0.$$

Les équations paramétriques de MM' peuvent s'écrire (n° 95)

$$\begin{cases} x = \dfrac{\rho + \rho'}{2}\cos\alpha + u(\rho - \rho')\cos\alpha, \\ y = \dfrac{\rho - \rho'}{2}\sin\alpha + u(\rho + \rho')\sin\alpha, \\ z = 2hu. \end{cases} \tag{6}$$

D'autre part, si l'on pose $l^2 - h^2 = a^2$, on peut satisfaire identiquement à l'équation (1) en posant

$$(7) \qquad (\rho - \rho')\cos\alpha = 2a\cos v, \qquad (\rho + \rho')\sin\alpha = 2a\sin v.$$

Portant dans (6), nous obtenons

$$(8) \qquad \begin{cases} x = a\left(\cot\alpha\sin v + \dfrac{z}{h}\cos v\right), \\ y = a\left(\operatorname{tang}\alpha\cos v + \dfrac{z}{h}\sin v\right), \\ z = z. \end{cases}$$

Telles sont les équations paramétriques du lieu, où v et z sont les deux paramètres.

En posant $\operatorname{tang}\dfrac{v}{2} = t$, on voit que *la surface est unicursale.*

En supposant z constant, on voit aussi que les sections par les plans parallèles à xOy sont des ellipses.

5. *On donne deux droites* D *et* D′ *et un point* A *dans l'espace. Par* D *et* D′, *on mène deux plans quelconques* (P) *et* (P′); *puis, par* A, *on mène un plan* (Q) *perpendiculaire à leur intersection. Lieu du point commun à ces trois plans.*

Adoptons les mêmes axes et les mêmes notations que dans l'exercice précédent. Soient, d'autre part, x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A. Les équations de (P) et (P′) sont de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} x\sin\alpha - y\cos\alpha + \lambda(z - h) = 0, \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha + \mu(z + h) = 0. \end{cases}$$

λ et μ désignant deux paramètres arbitraires. L'intersection de ces deux plans a pour paramètres directeurs (n° 94)

$$-(\lambda + \mu)\cos\alpha, \quad (\lambda - \mu)\sin\alpha, \quad 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

L'équation du plan (Q) est donc

$$(2) \qquad -(x - x_0)(\lambda + \mu)\cos\alpha + (y - y_0)(\lambda - \mu)\sin\alpha + 2(z - z_0)\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

Nous avons deux paramètres indépendants. Le lieu est donc une surface, dont nous aurons l'équation en éliminant λ, μ entre (1) et (2).

Tirant λ et μ de (1) et portant dans (2), on trouve sans difficulté

$$(3)\qquad \begin{aligned}&(x-x_0)(zx-hy\cot\alpha)\\&+(y-y_0)(zy-hx\tan\alpha)+(z-z_0)(z^2-h^2)=0.\end{aligned}$$

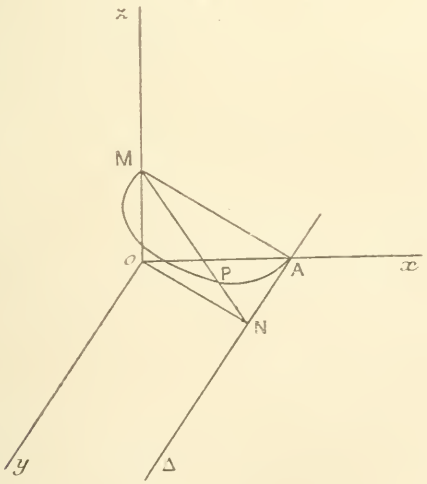
Le lieu est une *surface du troisième degré*. Les termes de plus haut degré sont $z(x^2+y^2+z^2)$; cette surface est donc une *cyclide* (n° 382).

On pourrait aisément en avoir les équations paramétriques, en résolvant le système (1), (2) par rapport à x, y, z. Il est alors avantageux de substituer à λ, μ les paramètres $u=-\dfrac{\lambda+\mu}{2}$ et $v=\dfrac{\lambda-\mu}{2}$. On obtient évidemment des expressions rationnelles en u, v, que nous laissons au lecteur le soin de calculer.

6. *Soient trois axes rectangulaires* $Oxyz$, *un point fixe* A *sur* Ox *et la parallèle* Δ *à* Oy *menée par ce point. On prend un point* M *sur* Oz *et un point* N *sur* Δ *tels que* OM = AN. *Dans le plan* MAN *on décrit un cercle de diamètre* AM. *Ce cercle coupe la droite* MN *en un point* P *dont on demande le lieu.*

Le point P peut être défini par l'intersection de la sphère de diamètre AM, du plan MAN et du plan MON (*fig.* 5). Cherchons les

Fig. 5.



équations de ces surfaces. Soient $2a$ l'abscisse de A, 2λ la cote de M et l'ordonnée de N. Nous avons, pour la sphère, le plan MAN et le plan OMN.

les équations respectives

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2\lambda z = 0, \tag{1}$$

$$\frac{x}{2a} + \frac{z}{2\lambda} - 1 = 0, \tag{2}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{\lambda}. \tag{3}$$

Le point P étant le seul point commun à ces trois surfaces qui soit inconnu, nous devons pouvoir calculer ses coordonnées par des opérations toutes rationnelles. Effectivement, de (2) et (3) nous tirons

$$z = \frac{\lambda(2a - x)}{a}, \qquad y = \frac{\lambda x}{a}. \tag{4}$$

Portons dans (1).

$$x^2 + \frac{\lambda^2 x^2}{a^2} + \frac{\lambda^2(2a - x)^2}{a^2} - 2ax - \frac{2\lambda^2(2a - x)}{a} = 0.$$

Cette équation doit admettre la racine $x = 0$, qui correspond au point M. Et, en effet, on constate que les termes constants $4\lambda^2$ et $-4\lambda^2$ se détruisent. Après suppression du facteur x, il nous reste une équation du premier degré, d'où nous tirons

$$x = \frac{2a(\lambda^2 + a^2)}{2\lambda^2 + a^2}.$$

Portant dans (4), nous avons y et z. Finalement, *les équations paramétriques du lieu* sont

$$x = \frac{2a(\lambda^2 + a^2)}{2\lambda^2 + a^2}, \qquad y = \frac{2\lambda(\lambda^2 + a^2)}{2\lambda^2 + a^2}, \qquad z = \frac{2\lambda^3}{2\lambda^2 + a^2}. \tag{5}$$

Elles représentent une *cubique gauche*.

Si, au lieu de chercher les équations paramétriques, on procédait par élimination, on obtiendrait une surface du second degré et deux surfaces du troisième degré, qui doivent admettre la cubique ci-dessus comme courbe commune. Cela serait un mode très compliqué de représentation du lieu (*cf.* n° 63).

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Étant données deux droites Ox et Oy dans un même plan, trouver le lieu des points dont la somme des distances à ces deux droites est constante. Même question pour la somme des carrés des distances.

[Prendre les droites comme axes de coordonnées, en introduisant l'angle des axes. Si l'on prend les distances en valeur absolue, le premier lieu est le périmètre d'un rectangle.]

2. Équation de la parabole.

3. Étant donnés n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et n coefficients $m_1, m_2, \ldots, m_n$, trouver le lieu des points M tels que

$$m_1 \overline{MA_1}^2 + m_2 \overline{MA_2}^2 + \ldots + m_n \overline{MA_n}^2 = \text{const.},$$

soit dans le plan, soit dans l'espace.

4. Étant donnés une droite et un point fixes, trouver le lieu des points dont la somme des distances ou des carrés des distances à cette droite et à ce point est constante.

5. Soient deux points fixes A, B et une droite fixe Δ rencontrant AB. Trouver le lieu des points M tels que les droites MA, MB interceptent sur Δ un segment de longueur constante.

6. On considère les cercles tangents à deux droites données. On les associe deux à deux de manière qu'ils se coupent à angle droit. Trouver le lieu de leurs points de rencontre. (Solution géométrique.)

7. Même question pour les cercles passant par un point donné et tangents à une droite donnée.

8. Un triangle ABC a deux sommets fixes A et B. De plus, $B = 2A$. Trouver le lieu du troisième sommet.

9. Même question en supposant que les angles A, B, C soient liés par une équation linéaire quelconque :

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = \delta.$$

Condition pour que le lieu soit algébrique. Montrer que si cette condition est remplie, le lieu est une courbe unicursale.

[On cherchera les équations paramétriques, ou bien l'équation polaire, en prenant, par exemple, A pour pôle et AB pour axe polaire.]

10. Soient deux points fixes A et B. Par A, on mène deux droites D et D′ symétriques par rapport à AB. Puis, par B, on mène la

droite D″ perpendiculaire à D. Lieu du point de rencontre des droites D′ et D″. (*É. P.*, 1913.)

11. Soient un cercle, un point fixe O et un point mobile M situés tous deux sur ce cercle. Trouver le lieu du point de rencontre de la tangente en M avec la perpendiculaire en M à OM. (Cissoïde. Solution géométrique.)

12. On donne une droite fixe Δ et un point fixe O. Par O, on mène deux droites rectangulaires, qui rencontrent Δ en M, M′. Par M, M′, on mène des perpendiculaires à Δ, qui rencontrent OM′ et OM en N, N′. En supposant que l'angle droit MOM′ tourne autour de son sommet, trouver les lieux suivants :

1° Lieux de N, N′ et de leur milieu;

2° Lieux des points de rencontre des bissectrices de $\widehat{MOM'}$ avec MN, M′N′, NN′;

3° Lieux des centres des cercles inscrits aux triangles OMM′, ONN′, OMN, OM′N′ et exinscrits dans l'angle en O.

13. Soient deux points fixes A et A′ et deux cercles variables tangents à AA′ en A et A′ respectivement. Ils se coupent en deux points M, N. Trouver les lieux de ces points et de leur milieu quand :

1° Les deux cercles sont orthogonaux. (Le lieu de M, N se décompose en deux cercles.)

2° Le point M décrit une droite donnée. (Solution géométrique.)

14. On donne un cercle fixe, de centre O, et un point fixe A. Par A, on mène une sécante, qui coupe le cercle en B et C. On projette O en H sur BC et l'on prolonge OH d'une longueur HM = HB = HC. Lieu de M. (*É. P.*, 1913.)

15. Soit un cercle de centre O. On prend sur sa circonférence un point fixe A et un point mobile M. On projette ce dernier en P sur AO. Lieux des centres des cercles inscrits dans les triangles OMP et AMP. (On peut employer des coordonnées polaires.)

16. On reprend les notations de l'exercice résolu n° 4 :

1° Les points M et M′ étant quelconques sur D et D′, trouver le lieu du pied de la perpendiculaire commune à Oz et MM′. (Conoïde de Plücker);

2° Trouver le lieu de ce même pied quand MM′ a une longueur constante. On cherchera, en particulier, l'équation polaire de la projection du lieu sur xOy;

3° Surface engendrée par MM′ quand les plans (D, M′) et (D′, M) sont rectangulaires. Lieu des points divisant MM′ dans un rapport constant, dans la même hypothèse.

17. Soient trois axes rectangulaires $Oxyz$. Sur Ox et Oy, on prend les points fixes A et B tels que $\overline{OA} = \overline{OB} = a$. Sur Oz, on prend un point M variable. Lieux du cercle circonscrit au triangle ABM, du centre de ce cercle et de l'orthocentre de ce triangle.

18. Lieu des points de l'espace équidistants de deux droites données.

19. Lieu des points de l'espace dont la somme ou la différence des carrés des distances à deux droites données est constante.

20. Étant donnés trois axes rectangulaires $Oxyz$, trouver le lieu des points de l'espace dont la somme ou la différence des distances aux deux axes Ox et Oy a une valeur constante a. Lieu des mêmes points quand on les suppose, en outre, à la distance $\frac{a}{\sqrt{2}}$ de Oz.

21. Soit le trièdre trirectangle $Oxyz$. On prend sur les axes trois points fixes : A sur Ox, B sur Oy, C sur Oz, puis trois points mobiles M, N, P, tels que $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP}$. Enfin, on construit les points M′, N′, P′, tels que $\overline{OA}^2 = \overline{OM}.\overline{OM'}$, $\overline{OB}^2 = \overline{ON}.\overline{ON'}$, $\overline{OC}^2 = \overline{OP}.\overline{OP'}$. Trouver les lieux des points de rencontre de chacun des plans MNP, M′N′P′ avec la perpendiculaire abaissée de O sur l'autre. Trouver aussi les lieux des centres de gravité des triangles MNP, M′N′P′, de l'orthocentre et des hauteurs du triangle M′N′P′.

CHAPITRE VI.

LA DROITE EN GÉOMÉTRIE PLANE.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Soit la droite* (D), *d'équation*

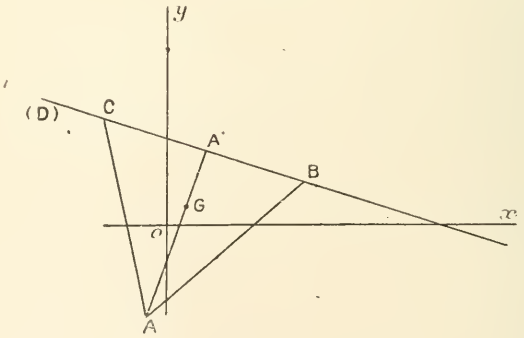
$$x + 3y - 14 = 0. \tag{1}$$

Former les équations des deux droites qui forment avec elle un triangle isoscèle d'angle au sommet 2θ, *ayant sa base sur* (D) *et son centre de gravité au point* G(1, 1). *Calculer également les équations des hauteurs, des médianes et des bissectrices adjacentes à la base.*

Nous allons d'abord calculer les coordonnées du sommet A (*fig.* 6). Les équations paramétriques de la hauteur AGA′ sont (n° 75)

$$x = 1 + \rho, \qquad y = 1 + 3\rho. \tag{2}$$

Fig. 6.



Le ρ de A′ est obtenu en portant ces expressions dans (1) :

$$1 + \rho' + 3 + 9\rho' - 14 = 0;$$

d'où $\rho' = 1$. Le ρ du point A est égal à $-2\rho' = -2$, car $\overline{GA} = -2\,\overline{GA'}$.

Les coordonnées de A sont finalement

$$x_0 = -1. \qquad y_0 = -5.$$

Cherchons maintenant le coefficient angulaire de AB. Si α et β désignent les angles polaires de AA′ et AB, on a

$$\beta = \alpha - \theta + k\pi. \qquad \operatorname{tang}\alpha = 3,$$
$$\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}(\alpha - \theta) = \frac{3 - \operatorname{tang}\theta}{1 + 3\operatorname{tang}\theta}.$$

L'équation de AB s'écrit dès lors (n° 75)

$$y + 5 = \frac{3 - \operatorname{tang}\theta}{1 + 3\operatorname{tang}\theta}(x + 1) = \frac{3\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + 3\sin\theta}(x + 1)$$

ou

$$(3) \quad x(-3\cos\theta + \sin\theta) + y(\cos\theta + 3\sin\theta) + 2(\cos\theta + 8\sin\theta) = 0.$$

Celle de AC s'en déduit par le changement de θ en $-\theta$:

$$(4) \quad x(3\cos\theta + \sin\theta) + y(3\sin\theta - \cos\theta) + 2(8\sin\theta - \cos\theta) = 0.$$

Hauteurs. — Pour calculer l'équation de la hauteur issue de B, la première idée est de calculer les coordonnées de B. Mais on peut s'en passer. L'équation cherchée est de la forme (n° 76)

$$(5) \quad \begin{aligned} &x(-3\cos\theta + \sin\theta) + y(\cos\theta + 3\sin\theta) \\ &\quad + 2(\cos\theta + 8\sin\theta) + \lambda(x + 3y - 14) = 0. \end{aligned}$$

Il s'agit simplement de calculer λ pour que la droite (5) soit perpendiculaire à la droite (4), ce qui s'exprime par la condition (n° 66)

$$\begin{aligned} &(3\cos\theta + \sin\theta)(-3\cos\theta + \sin\theta + \lambda) \\ &+ (3\sin\theta - \cos\theta)(3\sin\theta + \cos\theta + 3\lambda) = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\lambda \cdot 10\sin\theta + \sin^2\theta - 9\cos^2\theta + 9\sin^2\theta - \cos^2\theta = 0;$$

d'où

$$\lambda = \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}.$$

L'équation de la hauteur issue de B est donc

$$\begin{aligned} \sin\theta[(-3\cos\theta + \sin\theta)x + y(\cos\theta + 3\sin\theta) + 2(\cos\theta + 8\sin\theta)] \\ + \cos 2\theta(x + 3y - 14) = 0 \end{aligned}$$

ou

$$(6)\qquad \cos\theta[x(\cos\theta-3\sin\theta)+y(\sin\theta+3\cos\theta)] + 2(15\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-7\cos^2\theta)=0.$$

La hauteur issue de C est obtenue en changeant θ en $-\theta$:

$$(7)\qquad \cos\theta[x(\cos\theta+3\sin\theta)+y(3\cos\theta-\sin\theta)] + 2(15\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta-7\cos^2\theta)=0.$$

On peut contrôler les calculs en vérifiant que *les trois hauteurs sont concourantes.* A cet effet, utilisons les équations (2) et cherchons le ρ du point de rencontre de AA′ avec la hauteur (6) :

$$\cos\theta(4\cos\theta-2\sin\theta+10\rho\cos\theta) + 2(15\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-7\cos^2\theta)=0;$$

d'où

$$(8)\qquad \rho=1-3\operatorname{tang}^2\theta.$$

Cette expression ne change pas quand on change θ en $-\theta$; donc, elle constitue aussi le ρ du point de rencontre de AA′ avec la hauteur (7). Cela prouve bien que les trois hauteurs sont concourantes. Les coordonnées de l'orthocentre sont obtenues en portant (8) dans (2) :

$$(9)\qquad x_1=2-3\operatorname{tang}^2\theta,\qquad y_1=4-9\operatorname{tang}^2\theta.$$

Médianes. — L'équation (5) représentera la médiane BG si elle est vérifiée par les coordonnées du point G, ce qui donne $\lambda=2\sin\theta$; d'où l'équation

$$(10)\quad 3x(\sin\theta-\cos\theta)+y(\cos\theta+9\sin\theta)+2(\cos\theta-6\sin\theta)=0.$$

Changeant θ en $-\theta$, nous avons la médiane CG :

$$(11)\quad 3x(\sin\theta+\cos\theta)+y(9\sin\theta-\cos\theta)-2(\cos\theta+6\sin\theta)=0.$$

Bissectrices. — L'angle polaire de la bissectrice issue de B est

$$\beta-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\beta+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}=\alpha-\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}+k\pi.$$

Sa tangente est

$$\operatorname{tang}\left(\alpha-\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tang}\alpha-\dfrac{\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}+1}{1-\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}}{1+\operatorname{tang}\alpha\dfrac{\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}+1}{1-\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}}$$

$$=\frac{2-4\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}{4+2\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Tel est le coefficient angulaire de la bissectrice considérée. L'équation (51) représentera cette bissectrice, si l'on a

$$\frac{3\cos\theta-\sin\theta-\lambda}{\cos\theta+3\sin\theta+3\lambda}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}$$

ou

$$5\lambda\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)=\left(2\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)(3\cos\theta-\sin\theta)$$
$$+\left(2\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)(\cos\theta+3\sin\theta);$$

d'où

$$\lambda=\frac{\cos\frac{\theta}{2}(\cos\theta-\sin\theta)+\sin\frac{\theta}{2}(\cos\theta+\sin\theta)}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}=1.$$

L'équation cherchée est donc

(52) $$x(\sin\theta-3\cos\theta+1)$$
$$+y(\cos\theta+3\sin\theta+3)+2(\cos\theta+8\sin\theta-7)=0.$$

L'angle polaire $\alpha+\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}+k\pi$ de la bissectrice issue de C se déduit

de l'angle polaire de la bissectrice issue de B par le changement de θ en $-\theta-\pi$. D'autre part, le même changement échange AB et AC. Donc, on aura *l'équation de la bissectrice issue de* C en changeant θ en $-\theta-\pi$ dans (12), ce qui donne

$$(13)\qquad x(\sin\theta+3\cos\theta+1)+y(3\sin\theta-\cos\theta+3)+2(8\sin\theta-\cos\theta-7)=0.$$

On peut arriver plus rapidement aux équations (12) et (13) en remarquant que la bissectrice, issue de B par exemple, est le lieu des points équidistants de BC et BA, les normales à ces deux droites étant orientées toutes les deux vers l'extérieur (ou vers l'intérieur) du triangle. Or, le premier membre de (1) représente le produit par $\sqrt{10}$ de la distance d de BC au point $M(x, y)$, cette distance étant comptée positivement suivant le vecteur (1, 3) (n° 66), qui est, d'après la figure 6 (¹), extérieur au triangle. De même, le premier membre de (3) représente le produit par $\sqrt{10}$ de la distance d' de BA au point M, cette distance étant comptée positivement suivant le vecteur $(\sin\theta-3\cos\theta,\ \cos\theta+3\sin\theta)$, qui est, d'après la figure 6 (¹) et à condition de remarquer que la projection sur Oy est positive $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$, dirigé vers l'intérieur du triangle: Pour que M soit sur la bissectrice issue de B, il faut et il suffit que l'on ait $d=-d'$, ou $d+d'=0$, ou $d\sqrt{10}+d'\sqrt{10}=0$, ou (1) + (3) = 0. On retrouve bien l'équation (12).

On verrait de même que la bissectrice, issue de C, a pour équation (1) + (4) = 0, ce qui est (13).

Vérifions, pour terminer, que les bissectrices sont concourantes. En portant (2) dans (12), on obtient le ρ du point de rencontre de AA' avec la bissectrice issue de B, soit, après un calcul facile,

$$(14)\qquad \rho=\frac{1-2\sin\theta}{1+\sin\theta}.$$

Cette expression ne change pas quand on échange θ en $-\theta-\pi$; donc, c'est aussi le ρ du point de rencontre de AA' avec la bissectrice issue de C. Cela prouve bien que les trois bissectrices se coupent au même point, lequel a pour coordonnées

$$(15)\qquad x_2=\frac{2-\sin\theta}{1+\sin\theta},\qquad y_2=\frac{4-5\sin\theta}{1+\sin\theta}.$$

(¹) On peut aussi, sans regarder la figure, remarquer que le point G se trouve dans la région négative, car le résultat de substitution de ses coordonnées dans (1) est négatif (n° 71). Remarque analogue pour d'.

2. *Calculer la surface du triangle dont les côtés ont pour équation*

$$(1)\qquad \begin{cases} Ax + By - C = 0, \\ A'x + B'y - C' = 0. \\ A''x + B''y - C'' = 0. \end{cases}$$

Première méthode. — Utilisons la formule (72) du n° 82. Soient x_1, y_1 les coordonnées du sommet M qui est à l'intersection des côtés D′ et D″. On a

$$(2)\qquad A'x_1 + B'y_1 + C' = 0, \qquad A''x_1 + B''y_1 - C'' = 0;$$

d'où l'on tire (t. I, n° 289)

$$(3)\qquad x_1 = \frac{a}{c}, \qquad y_1 = \frac{b}{c},$$

en désignant par des petites lettres les mineurs du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}.$$

De même

$$x_2 = \frac{a'}{c'}, \qquad y_2 = \frac{b'}{c'}; \qquad x_3 = \frac{a''}{c''}, \qquad y_3 = \frac{b''}{c''};$$

d'où

$$2S = \begin{vmatrix} \frac{a}{c} & \frac{b}{c} & 1 \\ \frac{a'}{c'} & \frac{b'}{c'} & 1 \\ \frac{a''}{c''} & \frac{b''}{c''} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{cc'c''} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Mais le déterminant $\| a \quad b \quad c \|$ n'est autre que le déterminant adjoint de Δ; il est donc égal à Δ^2 (t. I, n° 287). Finalement, nous avons

$$(4)\qquad 2S = \frac{\Delta^2}{cc'c''} = \frac{\Delta^2}{(A'B'' - B'A'')(A''B - B''A)(AB' - BA')}.$$

Deuxième méthode ou méthode directe. — Abaissons la hauteur MH. Orientons-la par le vecteur (A, B) et la droite D par le vecteur (B, — A) (n° 66). Nous avons, en grandeur et en signe,

$$(5)\qquad 2S = \overline{M'M''} \cdot \overline{HM}.$$

Calculons $\overline{M'M''} = \rho$. Si x', y' sont les coordonnées de M', celles de M'' sont $x'' = x' + \rho \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $y'' = y' - \rho \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$. On a, d'autre part,

$$Ax' + By' + C = 0, \qquad A''x' + B''y' + C'' = 0,$$

$$A'x' + B'y' + C' + \rho \frac{BA' - AB'}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$$

Éliminons x', y' entre ces trois équations (t. I, n° 291, III) :

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' + \rho \dfrac{BA' - AB'}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0.$$

En remplaçant C par $C + o$ et C'' par $C'' + o$, ce déterminant se décompose en deux autres (Tome I, n° 281) :

$$\Delta + \rho \frac{BA' - AB'}{\sqrt{A^2+B^2}} (BA'' - AB'') = 0;$$

d'où

$$\rho = \frac{\Delta \sqrt{A^2+B^2}}{c''c'}. \tag{6}$$

Calculons maintenant $\overline{HM} = h$. Si x, y sont les coordonnées de M, on a (n° 66)

$$h\sqrt{A^2+B^2} = Ax + By + C,$$

$$A'x + B'y + C' = 0, \qquad A''x + B''y + C'' = 0.$$

Éliminons x, y entre ces trois équations :

$$\begin{vmatrix} A & B & C - h\sqrt{A^2+B^2} \\ A' & B' & C' + o \\ A'' & B'' & C'' + o \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\Delta - h\sqrt{A^2+B^2}\, c = 0;$$

d'où

$$h = \frac{\Delta}{c\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{7}$$

Portant (6) et (7) dans (5), on retrouve (4).

3. *Étant donnés la droite*

$$(1) \qquad P \equiv Ax + By + C = 0$$

et les deux points $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, *trouver le rapport suivant lequel la droite* (P) *divise le segment* M_1M_2.

Soit M le point de rencontre de (P) et de M_1M_2. Si l'on pose $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = -\lambda$, on sait que les coordonnées de M sont (n° 23)

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Portant dans (1), nous obtenons l'équation qui doit nous donner λ :

$$A(x_1 + \lambda x_2) + B(y_1 + \lambda y_2) + C(1 + \lambda) = 0.$$

On en tire

$$\lambda = -\frac{P_1}{P_2},$$

en appelant P_i ce que devient P quand on y remplace x, y par x_i, y_i. Nous avons la formule

$$(2) \qquad \frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = \frac{P_1}{P_2}.$$

4. Théorème de Céva. — *Étant donné un triangle* $A_1A_2A_3$, *on prend les points* a_1 *sur* A_2A_3, a_2 *sur* A_3A_1, a_3 *sur* A_1A_2. *Pour que les trois droites* A_1a_1, A_2a_2, A_3a_3 *soient concourantes, il faut et il suffit que l'on ait*

$$(1) \qquad \frac{\overline{a_1A_2}}{\overline{a_1A_3}} \, \frac{\overline{a_2A_3}}{\overline{a_2A_1}} \, \frac{\overline{a_3A_1}}{\overline{a_3A_2}} = -1.$$

Première méthode. — Prenons pour axe des x le côté A_1A_2 et pour axe des y le côté A_1A_3. Soient $\alpha = \overline{A_1A_2}$ et $\beta = \overline{A_1A_3}$. Soient, d'autre part, λ_1, λ_2, λ_3 les rapports $\frac{\overline{a_1A_2}}{\overline{a_1A_3}}$, $\frac{\overline{a_2A_3}}{\overline{a_2A_1}}$, $\frac{\overline{a_3A_1}}{\overline{a_3A_2}}$. Les coordonnées des points a_1, a_2, a_3 sont respectivement (n° 23)

$$\frac{\alpha}{1 - \lambda_1}, \quad \frac{-\lambda_1\beta}{1 - \lambda_1}; \qquad 0, \quad \frac{\beta}{1 - \lambda_2}; \qquad \frac{-\lambda_3\alpha}{1 - \lambda_3}, \quad 0.$$

On en déduit les équations de A_1a_1, A_2a_2, A_3a_3 :

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{-\lambda_1\beta}; \tag{2}$$

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y(1-\lambda_2)}{\beta} - 1 = 0 \qquad (\text{n° } 70); \tag{3}$$

$$-\frac{x(1-\lambda_3)}{\lambda_3\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0 \qquad (\text{n° } 70). \tag{4}$$

Il s'agit d'exprimer que ces trois droites sont concourantes. On pourrait le faire en suivant les méthodes du n° 80. Il est un peu plus simple de procéder comme il suit :

En retranchant (4) de (3), nous obtenons la droite qui joint l'origine au point d'intersection des droites A_2a_2, A_3a_3 (n° 78), soit

$$\frac{x}{\lambda_3\alpha} - \frac{y\lambda_2}{\beta} = 0. \tag{5}$$

Pour que les trois droites soient concourantes, il faut et il suffit que les droites (5) et (2) coïncident, ce qui se traduit par

$$\frac{1}{\lambda_3} + \lambda_1\lambda_2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1. \tag{6}$$

Deuxième méthode. — Prenons des axes quelconques. Soient

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0 \tag{7}$$

les équations respectives de A_1a_1, A_2a_2, A_3a_3. Pour que ces droites soient concourantes, il faut et il suffit que l'on puisse trouver trois nombres λ, μ, ν non tous nuls donnant lieu à l'identité (n° 80)

$$\lambda P + \mu Q + \nu R \equiv 0. \tag{8}$$

Or, pour exprimer que la fonction linéaire en x, y, qui est au premier membre, est identiquement nulle, il suffit d'exprimer qu'elle est nulle pour les coordonnées des points A_1, A_2, A_3, non en ligne droite [1]. On obtient ainsi, en remarquant que $P_1 = Q_2 = R_3 = 0$,

$$\mu Q_1 + \nu R_1 = 0, \qquad \lambda P_2 + \nu R_2 = 0, \qquad \lambda P_3 + \mu Q_3 = 0. \tag{9}$$

---

[1] Car, si une fonction linéaire f de x, y n'est pas identiquement nulle, elle ne peut s'annuler que pour les points d'une ligne droite, à savoir la ligne droite représentée par l'équation $f = 0$.

Pour que ces équations admettent des solutions non nulles en λ, μ, ν, il faut et il suffit que l'on ait (t. I, n° 292)

$$\begin{vmatrix} 0 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & 0 & R_2 \\ P_3 & Q_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou, en développant par la règle de Sarrus (t. I, n° 280),

$$P_3 Q_1 R_2 - P_2 Q_3 R_1 = 0. \tag{10}$$

Or, on a, en gardant les notations de plus haut et se reportant à l'exercice précédent,

$$\lambda_1 = \frac{P_2}{P_3}, \qquad \lambda_2 = \frac{Q_3}{Q_1}, \qquad \lambda_3 = \frac{R_1}{R_2};$$

d'où

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \frac{P_2 Q_3 R_1}{P_3 Q_1 R_2}.$$

Moyennant quoi, la condition (10) apparaît comme identique à (6).

5. *Le faisceau*

$$x^2 - 3xy - 2y^2 + \lambda(3x^2 - 4xy + y^2) = 0 \tag{1}$$

coupe la droite D

$$2x - y + 5 = 0 \tag{2}$$

aux deux points A *et* B. *Par* A *on mène la perpendiculaire à* OA *et par* B *la perpendiculaire à* OB. *Ces deux perpendiculaires se rencontrent en un point* M, *dont on demande le lieu, quand* λ *varie. Déterminer la région de ce lieu où se trouve* M, *quand* A *et* B *sont réels, ainsi que les positions de* M *pour lesquelles l'angle* $\widehat{AOB}$ *est droit ou bien égal à* 28°.

Pour déterminer M en fonction de λ, on pourrait songer à calculer séparément les coordonnées de A et de B, pour former ensuite les équations de AM et de BM. Mais une telle méthode serait impraticable, car *il est impossible de séparer analytiquement les points* A *et* B, sous peine d'introduire des radicaux qui compliqueraient énormément les calculs.

Voici une méthode indirecte beaucoup plus simple. Observons que les points A et B sont à l'intersection de la droite D avec le cercle (C)

décrit sur OM comme diamètre. Nous allons nous donner les coordonnées α, β du point M. Nous formerons ensuite l'équation du cercle (C), puis celle du faisceau qui joint l'origine aux points de rencontre de D et de (C) (n° 78). Nous identifierons ce faisceau avec le faisceau (1).

L'équation du cercle (C), qui passe à l'origine et a pour centre le point $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$, s'écrit (n° 162)

$$x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y = 0. \tag{3}$$

Éliminons la variable d'homogénéité entre (2) et (3) :

$$5(x^2 + y^2) + (\alpha x + \beta y)(2x - y) = 0. \tag{4}$$

Identifions avec (1) :

$$\frac{5 + 2\alpha}{3\lambda + 1} = \frac{5 - \beta}{\lambda - 2} = \frac{2\beta - \alpha}{-4\lambda - 3}. \tag{5}$$

Pour trouver le lieu du point M, on peut soit éliminer λ entre ces équations, soit les résoudre par rapport à α et β. A cause des questions auxquelles nous aurons à répondre ensuite, employons la seconde méthode.

Multiplions les deux termes de chacun des trois rapports (5) respectivement par 1, 4 et 2 et ajoutons les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux ; nous obtenons le rapport égal $\frac{25}{-\lambda - 13}$. Le premier rapport nous donne ensuite α et le second β. On trouve, tous calculs faits,

$$\alpha = \frac{-45 - 40\lambda}{13 + \lambda}, \qquad \beta = \frac{15 + 30\lambda}{13 + \lambda}. \tag{6}$$

Ces formules peuvent s'écrire

$$\alpha = \frac{-\frac{45}{13} - 40\mu}{1 + \mu}, \qquad \beta = \frac{\frac{15}{13} + 30\mu}{1 + \mu}, \tag{7}$$

en posant

$$\mu = \frac{\lambda}{13}. \tag{8}$$

Donc (n° 23), le point M divise le segment M_0M_1 dans le rapport

$$\frac{MM_0}{MM_1} = -\frac{13}{\lambda}, \tag{9}$$

M_0 et M_1 ayant respectivement pour coordonnées $\left(-\frac{45}{13}, +\frac{15}{13}\right)$ et $(-40, +30)$. Quand λ varie, *le lieu de* M *est la droite* M_0M_1.

La *condition de réalité* du faisceau (1) est

$$(3+4\lambda)^2-4(1+3\lambda)(\lambda-2)=0$$

ou

$$4\lambda^2+44\lambda+17=0. \tag{10}$$

λ doit être extérieur aux racines du trinome ci-dessus, qui sont $-0,4$ et $-10,6$. Autrement dit, $\frac{MM_0}{MM_1}$ doit être extérieur à l'intervalle $\left(\frac{13}{10,6}, \frac{13}{0,4}\right)$ ou $(1,23; 32,5)$.

Dans ces conditions, M *reste extérieur au segment* M_2M_3, M_2 et M_3 ayant pour coordonnées respectives les valeurs (6) pour $\lambda=-0,4$ et $-10,6$, soit $(-2,3; +0,238)$ et $(+158, -126)$.

Les rayons du faisceau (1) *sont rectangulaires* pour (n° 79)

$$1-2+\lambda(3+1)=0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda=\frac{1}{4}.$$

Le point M correspondant a pour coordonnées $(-4,15; +1,7)$. Calculons l'angle V du faisceau pour une valeur quelconque de λ. Les coefficients angulaires des deux rayons sont donnés par l'équation du second degré

$$m^2(\lambda-2)-m(4\lambda+3)+3\lambda+1=0.$$

Si m et m' sont les deux racines, on a (n° 68)

$$\operatorname{tang} V=\frac{m'-m}{1+mm'}=\frac{\sqrt{(m'+m)^2-4mm'}}{1+mm'}=\frac{\sqrt{\left(\frac{4\lambda+3}{\lambda-2}\right)^2-4\cdot\frac{3\lambda+1}{\lambda-2}}}{1+\frac{3\lambda+1}{\lambda-2}}.$$

Les valeurs de λ correspondant à une valeur donnée de V sont racines de l'équation

$$\left(\frac{4\lambda+3}{\lambda-2}\right)^2-4\frac{3\lambda+1}{\lambda-2}=\left(1+\frac{3\lambda+1}{\lambda-2}\right)^2\operatorname{tang}^2 V$$

ou

$$4\lambda^2(1-4\operatorname{tang}^2 V)+4(11+2\operatorname{tang}^2 V)\lambda+17-\operatorname{tang}^2 V=0. \tag{12}$$

Pour $V = 28^\circ$, on a $\operatorname{tang} V = 0,532$; $\operatorname{tang}^2 V = 0,283$. L'équation (12) devient

$$-0,528\lambda^2 + 46,26\lambda + 16,72 = 0;$$

ses racines sont 95 et $-0,32$. Les points M correspondants ont pour coordonnées $(-36,6; +26,5)$ et $(-2,55; +0,43)$.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Mettre sous la forme normale les équations

$$2x - y - 4 = 0, \qquad x + y\sqrt{3} = 6, \qquad 12x + 5y + 3 = 0.$$

2. Calculer la distance du point $(-3, 2)$ à la droite

$$13x - 4y + 52 = 0.$$

3. Même question pour le point $(t, -1)$ et la droite

$$2tx + (t^2 - 1)y + t^2 + 1 = 0.$$

4. Soient les deux droites

$$mx + (2m - 1)y + 3 = 0, \qquad (4m - 7)x - (m + 2)y - 8 = 0.$$

1° Déterminer m pour qu'elles soient perpendiculaires et calculer, dans cette hypothèse, les coordonnées de leur point de rencontre.

2° Déterminer m pour qu'elles soient parallèles et calculer, dans cette hypothèse, leur plus courte distance.

5. Déterminer l'angle des deux droites

$$2x + 7y - 15 = 0, \qquad 5x - y + 13 = 0.$$

6. Même question pour les deux droites

$$(ax + by)\cos\theta + (bx - ay)\sin\theta + cx + dy + p = 0,$$
$$(cx + dy)\cos\theta - (dx - cy)\sin\theta + ax + by + q = 0.$$

7. Étant donnée la droite (D), d'équation

$$3x + 2y - 5 = 0,$$

calculer les équations des deux droites qui font avec elle un angle de 45° et qui passent par le point $(2, -1)$. Calculer aussi les équations des deux droites qui forment avec les précédentes un carré ayant une diage-

nale sur (D). Calculer enfin l'équation de l'autre diagonale et la longueur du côté du carré.

8. Par l'origine des coordonnées (supposées rectangulaires), on mène une droite $O\lambda$ d'angle polaire φ. Sur cette droite on projette orthogonalement, en P, un point donné M. Puis on fait tourner $O\lambda$ autour de P d'un angle donné θ.

1° Calculer l'équation de la droite $P\lambda'$ ainsi obtenue.

2° Le point M et l'angle θ restant fixes et φ variant, montrer que $P\lambda'$ passe par un point fixe M'. Calculer les coordonnées de M' en fonction de celles de M et, inversement, celles de M en fonction de celles de M'.

3° On suppose maintenant que M décrive une droite D. Montrer que M' décrit une droite D'. Prouver que D' passe par un point fixe quand θ varie, D restant fixe.

4° On suppose au contraire que M' décrive une droite Δ'. Montrer que M décrit alors une droite Δ. Quel est le lieu de la projection de O sur Δ quand θ varie, Δ' restant fixe? (Solution géométrique.)

9. *Théorème de Ménélaüs.* — Reprenant les notations de l'Exercice résolu n° 4, démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les points a_1, a_2, a_3 soient en ligne droite est que l'on ait

$$\frac{\overline{a_1A_2}}{\overline{a_1A_3}}\,\frac{\overline{a_2A_3}}{\overline{a_2A_1}}\,\frac{\overline{a_3A_1}}{\overline{a_3A_2}} = 1.$$

10. *Généralisation du précédent.* — Soit un polygone quelconque $A_1A_2A_3A_4\ldots A_n$. On le coupe par une transversale quelconque (P), qui rencontre A_1A_2 en a_1, A_2A_3 en a_2, A_3A_4 en a_3, $\ldots A_nA_1$ en a_n. Démontrer que l'on a

$$\frac{\overline{a_1A_1}}{\overline{a_1A_2}}\,\frac{\overline{a_2A_2}}{\overline{a_2A_3}}\,\frac{\overline{a_3A_3}}{\overline{a_3A_4}}\cdots\frac{\overline{a_nA_n}}{\overline{a_nA_1}} = 1.$$

[S'appuyer sur l'Exercice résolu n° 3.]

11. Vérifier analytiquement que les médianes, les hauteurs, les bissectrices, les perpendiculaires au milieu des côtés d'un triangle sont concourantes.

11 *bis*. Reprenant les notations de l'exercice résolu n° 4, on considère le point a_1' symétrique de a_1 par rapport au milieu de A_2A_3 et les points analogues a_2' et a_3'. Montrer que si les points a_1, a_2, a_3 sont en ligne droite, il en est de même de a_1', a_2', a_3'.

12. Étant donné le triangle $A_1A_2A_3$, par un point O de son plan, on mène les perpendiculaires à OA_1, OA_2, OA_3. Elles rencontrent respectivement A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 en a_1, a_2, a_3. Démontrer que ces trois points a_1, a_2, a_3 sont en ligne droite.

[On pourra s'appuyer sur le théorème de Ménélaüs, en se servant de l'Exercice résolu n° 3, l'origine des coordonnées étant, d'autre part, prise au point O.]

13. Même exercice, en remplaçant la perpendiculaire à OA_i par la symétrique de OA_i par rapport à une droite fixe passant par O ou, plus généralement, par la conjuguée harmonique (n° 132) de OA_i par rapport à deux droites fixes passant par O.

[Prendre ces deux droites fixes pour axes de coordonnées.]

14. Étant données deux droites d'équations

$$(1) \qquad P \equiv Ax + By + C = 0, \qquad Q \equiv A'x + B'y + C' = 0,$$

quelle relation doit exister entre λ et μ pour que les droites

$$(2) \qquad P + \lambda Q = 0, \qquad P + \mu Q = 0$$

aient mêmes bissectrices que (P) et (Q)?

Cas où les équations (1) sont sous la forme normale

$$\left[\lambda\mu = \frac{A^2 + B^2}{A'^2 + B'^2}\text{; si forme normale, } \lambda\mu = 1\right].$$

15. Soient un triangle ABC et un point O. Montrer que la symétrique de OA par rapport à la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et les deux droites analogues déduites de OB et de OC sont trois droites concourantes.

[S'appuyer sur l'Exercice précédent.]

16. Montrer que la droite NN' de l'exercice proposé n° 12 du Chapitre précédent passe par un point fixe.

17. Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy, on projette un point P du plan en A sur Ox et en B sur Oy. Puis on joint AB. On mène enfin par P la perpendiculaire à AB. Montrer que cette perpendiculaire passe par un point fixe Q quand P décrit une droite parallèle à l'une ou l'autre des bissectrices de $\widehat{xOy}$. Lieu du point Q quand cette parallèle varie.

18. Étant donnés deux axes quelconques Ox, Oy, un point fixe A sur Ox et un point fixe B sur Oy, on considère deux points variables P sur Ox, Q sur Oy, tels que $\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} + \frac{\overline{OB}}{\overline{OQ}} = \text{const.}$ Montrer que la droite PQ passe par un point fixe.

19. Un triangle a un sommet A sur Ox et deux sommets B, B′ sur Oy. On prend un point M sur AB et un point M′ sur AB′.

1° Montrer que si ces points varient de manière que l'angle $\widehat{MOM'}$ ait toujours Ox pour bissectrice, la droite MM′ passe par un point fixe P. Lieu de ce point quand A, B, B′ varient de manière quelconque.

2° Le point P étant supposé fixe, le côté AB′ se déplace parallèlement à lui-même. Montrer que la médiane issue de B passe par un point fixe, ainsi que la hauteur issue de B′.

3° Le point P étant supposé fixe, le triangle ABB′ se déforme de manière que son centre de gravité décrive une droite passant par O. Montrer que les hauteurs passent chacune par un point fixe.

20. Étant donnée l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$$

en coordonnées rectangulaires, on fait tourner de l'angle φ, autour de O, le faisceau qu'elle représente. Calculer l'équation du nouveau faisceau ainsi obtenu. Déterminer φ pour que ce dernier admette Ox et Oy pour bissectrices. En déduire l'équation quadratique du faisceau des bissectrices du faisceau proposé.

21. L'équation

$$x^2 + 4xy + y^2 + \lambda(2x^2 - 2xy - y^2) = 0$$

représente un faisceau de deux droites. Déterminer λ pour que ces deux droites fassent un angle donné V. Discussion. Minimum de V. Calculer les deux droites pour $V = 18°$

22. Trouver la condition pour que le faisceau

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0$$

comprenne deux droites rectangulaires.

23. Déterminer λ pour que le faisceau

$$x^3 + y^3 + 3\lambda x^2 y = 0$$

soit constitué par deux droites également inclinées sur la troisième.

Séparer ces droites dans cette hypothèse.

24. Étant donnés le faisceau

$$7x^3 + 6x^2 y + 12xy^2 - 4y^3 = 0$$

et un point P dans son plan, montrer qu'il existe deux sécantes passant par P telles que si A, B, C sont les points de rencontre de l'une d'elles avec le faisceau, on ait

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = 0.$$

Dans quelle région du plan doit se trouver P pour que ces deux droites soient réelles? Où doit se trouver P pour qu'elles soient rectangulaires?

[On pourra prendre pour inconnues les paramètres directeurs de la sécante PABC.]

25. Calculer l'aire, les équations des côtés et les coordonnées de l'orthocentre du triangle dont les sommets ont pour coordonnées $(-2, -5)$, $(-3, +1)$, $(-6, -11)$.

CHAPITRE VII.

LE PLAN ET LA DROITE DANS L'ESPACE.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *On considère les deux plans*

$$(1)\quad \begin{cases} P \equiv \alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \\ Q \equiv (\gamma - \beta)x + (\alpha - \gamma)y + (\alpha - 7\beta)z + 4\alpha - 8\beta - 2\gamma = 0. \end{cases}$$

1° *Déterminer* α, β, γ *pour qu'ils soient parallèles.*

Les plans ainsi obtenus forment un parallélépipède dont on calculera les coordonnées des sommets, ainsi que le volume.

2° *Quelle relation doit exister entre* α, β, γ *pour que* (P) *et* (Q) *soient perpendiculaires? Montrer que les dièdres droits ainsi formés se répartissent en deux familles, pour chacune desquelles chaque face du dièdre passe par une droite fixe.*

1° Les conditions de parallélisme des plans (P) et (Q) s'écrivent (n° 85)

$$(2)\qquad \frac{\gamma - \beta}{\alpha} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta} = \frac{\alpha - 7\beta}{\gamma}.$$

Prenons pour inconnue auxiliaire S la valeur commune de ces rapports. Nous avons les trois équations

$$(3)\quad -\alpha S - \beta + \gamma = 0, \qquad \alpha - \beta S - \gamma = 0, \qquad \alpha - 7\beta - \gamma S = 0.$$

Pour que ce système, linéaire et homogène en α, β, γ, admette des solutions autres que la solution zéro, il faut et suffit qu'on ait (t. I, n° 292)

$$\begin{vmatrix} -S & -1 & 1 \\ 1 & -S & -1 \\ 1 & -7 & -S \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(4)\qquad S^3 - 7S + 6 = 0.$$

On aperçoit de suite la racine $S_1 = 1$. Après suppression du facteur $S - 1$, il reste l'équation du second degré

$$S^2 + S - 6 = 0,$$

dont les racines sont $S_2 = 2$, $S_3 = -3$.

Il nous reste maintenant à chercher les valeurs de α, β, γ qui correspondent à chacune de ces trois racines.

Racine $S_1 = 1$. — Les deux premières équations (3) nous donnent, par addition et soustraction,

$$\beta = 0, \qquad \alpha = \gamma = 1, \text{ par exemple.} \tag{5}$$

Les équations (1) s'écrivent alors

$$\begin{cases} (P_1) & x + z = 0, \\ (Q_1) & x + z + 2 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Racine $S_2 = 2$. — On trouve, en se servant encore des deux premières équations (3), qu'on peut prendre

$$\alpha = 3, \qquad \beta = -1, \qquad \gamma = 5; \tag{7}$$

d'où les équations

$$\begin{cases} (P_2) & 3x - y + 5z = 0, \\ (Q_2) & 3x - y + 5z + 5 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Racine $S_3 = -3$. — On trouve, de même,

$$\alpha = 1, \qquad \beta = -2, \qquad \gamma = -5; \tag{9}$$

$$\begin{cases} (P_3) & x - 2y - 5z = 0, \\ (Q_3) & x - 2y - 5z - 10 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Parallélépipède. — Les six plans (P_1), (Q_1), (P_2), (Q_2), (P_3), (Q_3), étant deux à deux parallèles, constituent les six faces d'un parallélépipède. Les plans (P_1), (P_2), (P_3) se coupent à l'origine, qui est le premier sommet.

Nous aurons un autre sommet A_1 par l'intersection de (P_2), (P_3), (Q_1). La résolution du système linéaire formé par les équations de ces plans est élémentaire et donne, pour coordonnées du point A_1 :

$$A_1 : \quad x_1 = -3, \qquad y_1 = -4, \qquad z_1 = 1.$$

On trouve, de même, les coordonnées des points A_2, intersection de

(P_3), (P_1), (Q_2), et A_3, intersection de (P_1), (P_2), (Q_3) :

$$A_2 : \quad x_2 = 1, \qquad y_2 = 3, \qquad z_2 = -1,$$
$$A_3 : \quad x_3 = 1, \qquad y_3 = -2, \qquad z_3 = -1.$$

Les quatre autres sommets B_1, B_2, B_3, C sont donnés maintenant par les égalités géométriques

$$\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}, \qquad \overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_1}, \qquad \overrightarrow{OB_3} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2},$$
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3},$$

dont on déduit

$$B_1 : \quad x'_1 = x_2 + x_3 = 2, \qquad y'_1 = y_2 + y_3 = 1, \qquad z'_1 = z_2 + z_3 = -2;$$
$$B_2 : \quad x'_2 = x_3 + x_1 = -2, \qquad y'_2 = y_3 + y_1 = -6, \qquad z'_2 = z_3 + z_1 = 0;$$
$$B_3 : \quad x'_3 = x_1 + x_2 = -2, \qquad y'_3 = y_1 + y_2 = -1, \qquad z'_3 = z_1 + z_2 = 0;$$
$$C : \quad x' = x_1 + x_2 + x_3 = -1, \qquad y' = y_1 + y_2 + y_3 = -3,$$
$$z' = z_1 + z_2 + z_3 = -1.$$

Il est à remarquer que le point C est l'intersection des plans (Q_1), (Q_2), (Q_3). C'est donc *le point fixe par lequel passent tous les plans* (Q). L'équation $Q = 0$ est en effet de la forme (22) du n° 88 et définit un réseau de plans. Le lecteur vérifiera sans peine que les coordonnées de C annulent séparément les coefficients de α, β, γ dans Q.

Le volume du parallélépipède est égal à six fois le volume du tétraèdre $OA_1A_2A_3$. (Prendre, par exemple, pour base du tétraèdre le triangle OA_1A_2 et pour base du parallélépipède le parallélogramme $OA_1A_2B_3$.) En appliquant la formule (50) du n° 93, on a donc

$$V = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= -5 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \times 2 = -10.$$

Le volume absolu est 10.

2° La condition d'orthogonalité des plans (P) et (Q) s'écrit (n° 84)

$$\alpha(\gamma - \beta) + \beta(\alpha - \gamma) + \gamma(\alpha - 7\beta) = 0$$

ou

$$\gamma(\alpha - 4\beta) = 0.$$

Elle se décompose en deux :

I. $\gamma = 0$. — Les équations (1) se réduisent à

$$(11)\qquad \begin{cases} \alpha x + \beta y = 0, \\ -\beta x + \alpha y + (\alpha - 7\beta) z + 4\alpha - 8\beta = 0. \end{cases}$$

Le plan (P) passe constamment par Oz et le plan (Q) par la droite d'équations (n° 90)

$$(12)\qquad y + z + 4 = 0, \qquad x + 7z + 8 = 0.$$

II. $\alpha = 4\beta$. — Les équations (1) deviennent

$$(13)\qquad \begin{cases} \beta(4x + y) + \gamma z = 0, \\ (\gamma - \beta)x + (4\beta - \gamma)y - 3\beta z + 8\beta - 2\gamma = 0. \end{cases}$$

Le plan (P) passe par la droite fixe

$$(14)\qquad z = 0, \qquad y + 4x = 0.$$

Le plan (Q) passe par la droite fixe

$$(15)\qquad -x + 4y - 3z + 8 = 0, \qquad x - y - 2 = 0.$$

2. *Soit la droite* D *définie par les équations*

$$(1)\qquad x + 8y - 3z + 2 = 0, \qquad -6x + 2y + z + 14 = 0.$$

1° *Calculer ses cosinus directeurs.*

2° *Calculer sa distance* MM′ *au point* M$(-2, +5, -1)$, *ainsi que les équations de la droite* MM′.

1° Les cosinus directeurs de D sont donnés par (n° 94) :

$$(2)\qquad \frac{a}{14} = \frac{b}{17} = \frac{c}{50} = \frac{1}{\sqrt{2985}};$$

d'où

$$(3)\qquad a = 0{,}256; \qquad b = 0{,}311; \qquad c = 0{,}914.$$

2° Appliquons la méthode indiquée au n° 96 (deuxième cas). L'équation générale des plans passant par D est

$$(4)\qquad (1 - 6\lambda)x + (8 + 2\lambda)y + (-3 + \lambda)z + 2 + 14\lambda = 0.$$

Le plan (D, M) est déterminé par la condition

$$-2(1-6\lambda)+5(8+2\lambda)-(-3+\lambda)+2+14\lambda=0;$$

d'où $\lambda=-\frac{43}{35}$. Portant dans (4), on a

$$293x+194y-148z-532=0. \tag{5}$$

Écrivons que le plan (4) est perpendiculaire à (5) :

$$293(1-6\lambda)+194(8+2\lambda)+148(3-\lambda)=0;$$

d'où

$$\lambda=\frac{2289}{1518}.$$

Portant dans (4), nous avons l'équation du plan P mené par D perpendiculairement à MM′ :

$$-12216x+16722y-2265z+35082=0. \tag{6}$$

La distance MM′ est

$$d=\frac{12216\times 2+16722\times 5+2265+35082}{\sqrt{\overline{12216}^2+\overline{16722}^2+\overline{2265}^2}}=\frac{145389}{20820},$$

$$d=6,98.$$

Les équations de la droite MM′ sont l'équation (5) et la suivante, qui représente le plan Q mené par M perpendiculairement à D :

$$14(x+2)+17(y-5)+50(z+1)=0$$

ou

$$14x+17y+50z-7=0. \tag{7}$$

3. *Soit un quadrilatère gauche* $A_1A_2A_3A_4$. *On prend un point quelconque* M_1 *sur* A_1A_2, *puis* M_2 *sur* A_2A_3, M_3 *sur* A_3A_4, M_4 *sur* A_4A_1 *tels que*

$$\frac{\overline{M_1A_1}}{\overline{M_1A_2}}=\frac{\overline{M_2A_2}}{\overline{M_2A_3}}=\frac{\overline{M_3A_3}}{\overline{M_3A_4}}=\frac{\overline{M_4A_4}}{\overline{M_4A_1}}. \tag{1}$$

Par M_1, *on mène le plan* P_1 *perpendiculaire à* A_3A_4. *De même, par* M_2, M_3, M_4, *on mène* P_2, P_3, P_4 *perpendiculaires à* A_4A_1, A_1A_2, A_2A_3. *Trouver la condition pour que ces quatre plans soient concourants.*

Prenons des axes rectangulaires quelconques et soient x_i, y_i, z_i les

coordonnées du point A_i. Soit, d'autre part, $-\frac{m'}{m}$ la valeur commune des rapports (1). Les coordonnées du point M_i sont (n° 23)

$$(2)\quad \xi_i=\frac{mx_i+m'x_{i+1}}{m+m'},\qquad \eta_i=\frac{my_i+m'y_{i+1}}{m+m'},\qquad \zeta_i=\frac{mz_i+m'z_{i+1}}{m+m'}.$$

Le plan P_1, par exemple, a pour équation (n° 88)

$$(3)\quad P_1\equiv(x-\xi_1)(x_3-x_4)+(y-\eta_1)(y_3-y_4)+(z-\zeta_1)(z_3-z_4)=0.$$

Les équations de P_2, P_3, P_4 s'en déduisent par permutations circulaires sur les indices.

Pour exprimer que les quatre plans sont concourants, cherchons à former une combinaison linéaire identiquement nulle (n° 89). A la simple inspection de l'équation (3), on voit qu'en ajoutant les quatre équations analogues, les termes en x, y, z disparaissent identiquement. La somme $P_1+P_2+P_3-P_4$ se réduit donc à une constante :

$$P_1+P_2+P_3+P_4\equiv\Sigma[-\xi_1(x_3-x_4)-\eta_1(y_3-y_4)-\zeta_1(z_3-z_4)].$$

Pour que les quatre plans soient concourants, il faut et il suffit que cette constante soit nulle (1). La condition demandée est donc, en remplaçant les ξ_i, η_i, ζ_i par (2),

$$(4)\quad \Sigma[(mx_1+m'x_2)(x_3-x_4)+(my_1+m'y_2)(y_3-y_4)+(mz_1+m'z_2)(z_3-z_4)]=0.$$

Il est bien entendu que cette somme doit comprendre les quatre crochets déduits de celui qui est écrit par permutations circulaires des indices. Ordonnons par rapport à m, m' :

$$m[\Sigma(x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3)-\Sigma(x_1x_4+y_1y_4+z_1z_4)]+m'[\Sigma(x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3)-\Sigma(x_2x_4+y_2y_4+z_2z_4)]=0.$$

Mais on a

$$(5)\quad \Sigma(x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3)=\Sigma(x_2x_4+y_2y_4+z_2z_4)=2[(x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3)+(x_2x_4+y_2y_4+z_2z_4)],$$

$$(6)\quad \Sigma(x_1x_4+y_1y_4+z_1z_4)=\Sigma(x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3).$$

---

(1) La condition est évidemment nécessaire, puisque la somme $P_1+P_2+P_3+P_4$ doit s'annuler pour les coordonnées du point de concours. Elle est suffisante, d'après le n° 89.

Si nous appelons A le crochet de (5) et B la valeur commune des deux membres de (6), *notre condition s'écrit*

$$(7) \qquad (2A - B)(m - m') = 0.$$

On voit qu'elle est vérifiée pour $m = m'$. Donc, *quel que soit le quadrilatère, si* M_1 *est au milieu de* A_1A_2, *les plans concourent.*

Si, maintenant, l'équation (7) est vérifiée pour $m \neq m'$, on a $B = 2A$ et (7) est vérifiée quels que soient m et m'. Donc, *si les plans concourent pour une position particulière de* M_1, *autre que le milieu de* A_1A_2, *ils concourent pour toutes les positions de* M_1. La condition pour qu'il en soit ainsi s'écrit d'ailleurs

$$(8) \qquad 2A = B.$$

On peut l'interpréter géométriquement. La somme $x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k$ est, en effet, le produit scalaire (n° 104) des vecteurs $\overrightarrow{OA_i}$ et $\overrightarrow{OA_k}$. Dès lors, (8) peut s'écrire

$$(9) \qquad \begin{aligned} &2[\overrightarrow{OA_1}.\overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_2}.\overrightarrow{OA_4}] \\ &= \overrightarrow{OA_1}.\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_2}.\overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OA_3}.\overrightarrow{OA_4} - \overrightarrow{OA_4}.\overrightarrow{OA_1}. \end{aligned}$$

Telle est la condition cherchée.

Comme les axes ont été arbitrairement choisis et que la condition (9) exprime une propriété du quadrilatère gauche, qui n'a rien à voir avec les axes, on peut affirmer que *si l'égalité* (9) *est vérifiée pour un point* O *particulier de l'espace, elle est vérifiée quel que soit* O.

Prenons, par exemple, O en A_1. L'équation (9) se réduit à

$$(10) \qquad 2\overrightarrow{A_1A_2}.\overrightarrow{A_1A_4} = \overrightarrow{A_1A_2}.\overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_3}.\overrightarrow{A_1A_4}.$$

On peut la transformer en s'appuyant sur l'égalité générale

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.$$

En multipliant (10) par 2, il vient

$$\begin{aligned} &2\left(\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_1A_4}^2 - \overline{A_2A_4}^2\right) \\ &= \overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_1A_3}^2 - \overline{A_2A_3}^2 - \overline{A_1A_3}^2 + \overline{A_1A_4}^2 - \overline{A_3A_4}^2 \end{aligned}$$

ou

$$(11) \qquad \overline{A_1A_2}^2 - \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2 - \overline{A_4A_1}^2 = 2\left(\overline{A_1A_3}^2 - \overline{A_2A_4}^2\right).$$

Autrement dit, *la somme des carrés des quatre côtés du quadrilatère doit être égale au double de la somme des carrés des diagonales.*

Le lecteur vérifiera que (10) peut aussi se mettre sous la forme

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_1A_4}\cdot\overrightarrow{A_3A_2}=0. \tag{12}$$

4. *Soient les deux droites*

$$(D)\qquad 2x=5z+3,\qquad y=4z+2;$$
$$(D')\qquad x=-3z-8,\qquad 5y=7z-4.$$

Calculer les coordonnées des pieds et la longueur de leur perpendiculaire commune.

On pourrait employer la méthode décrite au n° 97. Pour varier, nous allons en indiquer une autre, qui peut s'appliquer dans toutes les recherches de plus courte distance.

Prenons, sur D et D', deux points quelconques M et M', de cotes z et z'. Nous allons calculer la distance MM' en fonction de ces deux variables et *nous écrirons ensuite qu'elle est minimum*. Nous avons (n° 177)

$$\overline{MM'}^2=(2,5z+3z'+9,5)^2+(4z-1,4z'+2,8)^2+(z-z')^2.$$

Annulons les dérivées par rapport à z et à z' :

$$2,5(2,5z+3z'+9,5)+4(4z-1,4z'+2,8)+z-z'=0,$$
$$3(2,5z+3z'+9,5)-1,4(4z-1,4z'+2,8)-z+z'=0$$

ou

$$23,25z+0,9z'+35=0,$$
$$0,9z+11,96z'+24,6=0;$$

d'où

$$z=-1,43;\qquad z'=-1,96.$$

Portant dans (D) et (D'), nous obtenons les coordonnées des pieds M et M' :

$$M\,(x=-2,08;\ y=-3,72;\ z=-1,43),$$
$$M'(x'=-2,12;\ y'=-3,51;\ z'=-1,96).$$

La plus courte distance est ensuite donnée par

$$\overline{MM'}^2=\overline{0,04}^2+\overline{3,01}^2+\overline{0,53}^2=9,34;$$

d'où

$$MM'=3,06.$$

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Soit le plan P

$$x + 2y - z + 4 = 0.$$

Calculer les angles qu'il fait avec les plans de coordonnées, sa distance à l'origine, sa distance au point (6, — 3, — 1), l'angle qu'il fait avec le plan P′ :

$$2x - y - 4z - 1 = 0.$$

Trouver les équations des deux plans bissecteurs de P et P′. [Lieu des points équidistants de P et de P′.]

2. Soient les plans

$$(P) \qquad x(1 - t^2) + y(1 + t^2) + 2tz = \alpha + \beta t + \gamma t^2,$$

$$(Q) \qquad 2t^2 x + y - 2tz = \alpha' + \beta' t + \gamma' t^2,$$

où α, β, γ, α', β', γ' désignent des constantes quelconques.

1° Montrer qu'ils passent chacun par un point fixe.

2° Calculer leur angle V et étudier ses variations. Établir la formule

$$2t^2 = \operatorname{tang}\left(\frac{V}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \operatorname{tang}\left(\frac{V}{2} - \frac{\pi}{8}\right).$$

3° Montrer qu'il existe une infinité de points fixes situés chacun à une distance constante du plan (P). Même propriété pour le plan (Q).

4° Montrer que le plan (P) fait un angle constant avec une certaine droite fixe; calculer cet angle. Même propriété pour le plan (Q).

3. On donne un trièdre quelconque $Oxyz$. On prend deux points A et A′ sur Ox, deux points B et B′ sur Oy, deux points C et C′ sur Oz tels que l'on ait

$$\overline{OA}.\overline{OA'} = \overline{OB}.\overline{OB'} = \overline{OC}.\overline{OC'} = 1.$$

On considère les plans ABC ou (P) et A′B′C′ ou (P′), ainsi que les centres de gravité G et G′ des triangles ABC, A′B′C′.

1° Montrer que si les plans (P) et (P′) sont parallèles, GG′ passe par O et réciproquement. Déterminer le plan (P) de manière que le rapport $\frac{\overline{OG}}{\overline{OG'}}$ ait en outre une valeur donnée. Nombre de solutions.

2° Montrer que si les plans (P) et (P′) se coupent dans un plan

fixe (H), GG′ passe par un point fixe G_0 et réciproquement. Quelle relation existe-t-il entre (H) et G_0 ?

Déterminer (P) de manière que le rapport $\frac{\overline{G_0G}}{\overline{G_0G'}}$ ait, en outre, une valeur donnée k. Montrer qu'il y a huit solutions, se répartissant en quatre groupes (P_1, P_2) tels que le plan (P_1') qui correspond à (P_1) soit parallèle à (P_2), (P_2') étant, de même, parallèle à (P_1). Montrer que les quatre segments G_1G_2 ont même milieu I. Lieu de I quand k varie.

3° Montrer que si le plan (H) précédent passe à l'origine, GG′ a une direction fixe et réciproquement. Déterminer (P) pour que GG′ ait, en outre, une longueur constante. Montrer qu'il y a encore huit solutions jouissant des mêmes propriétés que dans 2°.

4. Soit un quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$, défini par les coordonnées de ses sommets. Vérifier analytiquement que les plans perpendiculaires au milieu des côtés sont concourants.

5. Reprendre l'Exercice résolu n° 3 en supposant l'angle $\widehat{A_2A_1A_4}$ droit.

On prendra l'origine en A_1, Ox suivant A_1A_2, Oy suivant A_1A_4 et Oz perpendiculaire.

6. Reprendre l'Exercice résolu n° 3, en menant le plan P_i perpendiculaire à A_iA_{i+1}. Montrer, en particulier, que la condition de rencontre, quand M_1 n'est pas au milieu de A_1A_2, est que la somme des carrés des côtés soit nulle.

7. Reprendre l'Exercice résolu n° 3, en remplaçant P_1 par $M_1A_3A_4$, etc.

[On exprimera les coefficients des plans au moyen des mineurs du déterminant $\| x_i \quad y_i \quad z_i \quad 1 \|$. On observera que la somme des mineurs relatifs à une même colonne est nulle ou égale à 6V.]

8. Etant donnée l'équation

$$(1) \quad (\lambda^2+1)x + \lambda(\lambda^2-1)y + \lambda^2(\lambda^2-2\lambda+1)z + \lambda^4 - \lambda^2 + 1 = 0,$$

on y remplace successivement λ par les quatre racines de l'équation

$$(2) \qquad \lambda^4 - 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + m\lambda - 1 = 0.$$

Déterminer m pour que les quatre plans obtenus soient concourants et calculer les coordonnées du point de concours.

[Identifier les équations (1) et (2) en λ.]

9. Même question pour les équations

$$\lambda^3 x - \lambda^2 y + \lambda z - \lambda^2 + 1 = 0 ; \tag{1}$$

$$\lambda^4 - m\lambda^3 + (m+1)\lambda^2 - \lambda - 1 = 0. \tag{2}$$

[(1) doit admettre toutes les racines de (2) en λ.]

10. Équation générale des plans qui passent par les deux points $M_0(2, 1, -1)$, $M_1(-3, 0, 2)$. Déterminer celui de ces plans qui est perpendiculaire au plan projetant M_0M_1 sur xOy.

11. Étant donnés trois axes rectangulaires, on mène par l'origine les trois demi-droites OA, OB, OC, de cosinus directeurs respectifs (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'').

1° Calculer l'équation du plan P mené par OA perpendiculairement au plan BOC, Prouver que les trois plans analogues P, P' P'' passent par une même droite.

2° Calculer l'équation du plan Q mené par OA perpendiculairement à P. Ce plan coupe BOC suivant une droite Oz. Prouver que les trois droites analogues sont dans un même plan.

[Introduire les plans perpendiculaires à OA, OB, OC, ainsi que les angles $\widehat{BOC} = \lambda$, $\widehat{COA} = \mu$, $\widehat{AOB} = \nu$.]

12. Gardant les notations de l'Exercice précédent, former l'équation du plan qui passe par OA et par la bissectrice intérieure de $\widehat{BOC}$. Prouver que les trois plans analogues passent par une même droite. Prouver que les trois bissectrices extérieures sont dans un même plan.

(On utilisera l'Exercice proposé n° 9 du Chapitre III.)

13. Reprenant encore les mêmes notations, former l'équation du plan perpendiculaire à BOC et qui passe par la bissectrice de l'angle $\widehat{BOC}$. Prouver que les trois plans analogues passent par une même droite.

14. Étant donné un tétraèdre, on oriente chacune de ses faces vers l'intérieur du tétraèdre. Il en résulte un sens de parcours déterminé sur chaque périmètre. Démontrer que la somme algébrique des aires des projections des quatre faces ainsi orientées sur un plan quelconque est nulle.

15. Soit un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ donné par les équations de ses faces,

celle de la face opposée au sommet A_i étant

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0.$$

Calculer les aires de chacune de ses faces et son volume. (*Cf.* Exercice résolu n° 2 du Chapitre VI.)

16. Reprenant les notations de l'Exercice n° 11, on porte $\overline{OM} = \rho$ sur OA, $\overline{ON} = \rho'$ sur OB, $\overline{OP} = \rho''$ sur OC. Évaluer le volume du tétraèdre OMNP en fonction de ρ, ρ', ρ'', λ, μ, ν. (*Cf.* N_m, n° 17.)

17. Si P et Q désignent deux fonctions linéaires de x, y, z et $f(P, Q)$ un polynome homogène en P, Q et de degré m, démontrer que l'équation

$$f(P, Q) = 0$$

représente un faisceau de m plans passant par une même droite.

18. L'équation

$$AP^2 + 2BPQ + CQ^2 = 0,$$

où l'on a posé

$$P \equiv ax + by + cz + d, \qquad Q \equiv a'x + b'y + c'z + d',$$

représente deux plans. Trouver la condition pour qu'ils soient perpendiculaires.

19. Par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$, on mène la droite D, de paramètres directeurs (a, b, c). De même, par $M_1(x_1, y_1, z_1)$, on mène D', de paramètres directeurs $(a' b' c')$. Trouver la condition de rencontre de ces deux droites.

20. Même question, en supposant que la droite D' est définie par les équations

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

21. Étant donnés les deux points $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$, le segment M_1M_2 est coupé en un certain point M par le plan $P = 0$. Calculer le rapport $\dfrac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}}$. (*Cf.* Exercice résolu n° 3, Chap. VI.)

22. Soit un quadrilatère gauche $A_1A_2A_3A_4$. On prend les points M_1 sur A_1A_2, M_2 sur A_2A_3, M_3 sur A_3A_4, M_4 sur A_4A_1. Démontrer que la

condition nécessaire et suffisante pour que les quatre plans $M_1A_3A_4$, $M_2A_4A_1$, $M_3A_1A_2$, $M_4A_2A_3$ soient concourants est que l'on ait

$$(1) \qquad \frac{\overline{M_1A_1}}{\overline{M_1A_2}}\,\frac{\overline{M_2A_2}}{\overline{M_2A_3}}\,\frac{\overline{M_3A_3}}{\overline{M_3A_4}}\,\frac{\overline{M_4A_4}}{\overline{M_4A_1}} = 1.$$

(Suivre la même marche que dans l'Exercice résolu n° 4 du Chapitre VI.)

23. Démontrer que la relation (1) de l'Exercice précédent est aussi la condition pour que les quatre points $M_1M_2M_3M_4$ soient dans un même plan. (*Cf.* Exercice proposé n° 9, Chap. VI.)

Comparer ce théorème avec le précédent. Le généraliser pour un polygone gauche quelconque. (*Cf.* Exercice proposé n° 10, Chap. VI.)

24. Une droite mobile MM′ s'appuie, en M et en M′, sur deux droites fixes D et D′ et reste perpendiculaire à la droite D. Montrer qu'en désignant par V l'angle des deux plans DMM′ et D′M′M on a $MM' \operatorname{tang} V = \text{const.}$

25. Étant données deux droites fixes D et D′, on prend M sur D et M′ sur D′ tels que les plans (D, M′) et (D′, M) soient constamment rectangulaires. On projette M′ en P sur D et M en P′ sur D′. Prouver que le rapport $\dfrac{\overline{MP}\cdot\overline{M'P'}}{\overline{MM'}^2}$ est constant. (On pourra employer les axes et notations de l'Exercice résolu n° 4 du Chapitre V.)

26. Soient la droite D d'équations

$$x - 2y + 2z + 1 = 0, \qquad 3x + y - 5z - 2 = 0$$

et le point M(1, −1, 0); calculer la distance de M à D, les coordonnées de la projection de M sur D, les équations de la perpendiculaire abaissée de M sur D.

27. Calculer la distance du point M(4, −1, 1) à la droite

$$2x - y + z + 4 = 0, \qquad x - y - z - 2 = 0.$$

28. Déterminer la droite de paramètres directeurs (α, β, γ) qui s'appuie sur la droite D définie par les deux points $M_1(-1, 0, 1)$,

$M_2(-2, 1, 0)$ et sur la droite D′ qui a pour équations

$$x+y+z=1, \qquad 2x-y-5z=0.$$

29. Déterminer la perpendiculaire commune aux deux droites précédentes, ainsi que leur plus courte distance.

30. Même question en remplaçant la droite D par la suivante :

$$3x+y-z=2, \qquad -x+4y=1.$$

31. *Équations paramétriques d'un plan.* — 1° Le plan est donné par un de ses points M_0 et par les cosinus directeurs (a, b, c) et (a', b', c') de deux droites $M_0\lambda$ et $M_0\mu$ issues de ce point dans le plan.

2° Le plan est donné par trois points M_0, M_1, M_2. Généraliser les formules obtenues.

[Dans le premier cas, prendre pour paramètres u et v les composantes de $\overrightarrow{M_0M}$ suivant $M_0\lambda$ et $M_0\mu$.

Dans le second cas, considérer M comme le centre des distances proportionnelles des points M_0, M_1, M_2 affectés des coefficients u, v, w. On généralise en prenant pour x, y, z trois fonctions homographiques de u, v, ayant le même dénominateur.]

CHAPITRE VIII.

THÉORIE DES VECTEURS.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Étant donnés un quadrilatère gauche* ABCD, *trois nombres fixes* m, n, p *et un nombre variable* λ, *on construit les points* a, b, c, d *sur* AB, BC, CD, DA *tels que*

$$\frac{\overline{Ba}}{\overline{BA}} = m + \lambda, \quad \frac{\overline{Bb}}{\overline{BC}} = n - \lambda, \quad \frac{\overline{Dd}}{\overline{DA}} = n + \lambda, \quad \frac{\overline{Dc}}{\overline{DC}} = p - \lambda.$$

Prouver que la somme géométrique $\overrightarrow{ac} + \overrightarrow{bd}$ *demeure constante.*

On a les égalités géométriques

$$\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{aB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{Cc}, \qquad \overrightarrow{bd} = \overrightarrow{bB} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{Ad}.$$

Or,

$$\overrightarrow{aB} = \overrightarrow{AB}(m + \lambda), \qquad \overrightarrow{Cc} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{Dc} = \overrightarrow{CD}(1 - p + \lambda),$$

$$\overrightarrow{bB} = (\lambda - n)\overrightarrow{BC}, \qquad \overrightarrow{Ad} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{Dd} = \overrightarrow{AD}(1 - n - \lambda);$$

d'où

$$\overrightarrow{ac} + \overrightarrow{bd} = \overrightarrow{AB}(m + \lambda - 1) + \overrightarrow{BC}(1 + \lambda - n) + \overrightarrow{CD}(1 - p + \lambda) + \overrightarrow{DA}(n - 1 + \lambda).$$

Le coefficient de λ est $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 0$. La somme géométrique considérée est donc bien constante.

2. *Soient* n *points fixes* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *affectés des coefficients* $m_1, m_2, \ldots, m_n$. *Étudier comment varie, avec le point* M, *la somme*

$$S = m_1 . \overline{MA_1}^2 + m_2 . \overline{MA_2}^2 + \ldots + m_n . \overline{MA_n}^2.$$

Comparons les valeurs de S pour deux points différents M et M'. A cet

effet, écrivons l'égalité géométrique

$$\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A_i}. \tag{1}$$

Faisons les produits scalaires des deux membres par eux-mêmes; il vient, eu égard à l'associativité (n° 104),

$$\overline{MA_i}^2 = \overline{MM'}^2 + \overline{M'A_i}^2 + 2\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{M'A_i}. \tag{2}$$

Multiplions par m_i et ajoutons toutes les égalités analogues :

$$S = \overline{MM'}^2 . \Sigma m_i + S' + 2\overrightarrow{MM'}.\left[\Sigma m_i . \overrightarrow{M'A_i}\right]. \tag{3}$$

Si $m = \Sigma m_i \neq 0$, nous simplifierons le second membre, en prenant M′ au centre A des distances proportionnelles, puisque ce point est caractérisé par l'égalité géométrique (n° 23) :

$$\Sigma m_i . \overrightarrow{AA_i} = 0. \tag{4}$$

Si l'on pose $S_0 = \Sigma m_i \overline{AA_i}^2$, l'égalité (3) devient

$$S = m . \overline{MA}^2 + S_0. \tag{5}$$

On voit que S *ne renferme plus qu'une quantité variable* MA. Ses variations sont donc évidentes. *Le lieu des points pour lesquels* S *a une valeur donnée est une sphère de centre* A ([1]).

Examinons maintenant le *cas particulier où* $\Sigma m_i = 0$.

La formule (3) devient

$$S = S' + 2\overrightarrow{MM'}\left[\Sigma m_i . \overrightarrow{M'A_i}\right]. \tag{6}$$

D'autre part, il est facile de montrer que $\Sigma m_i . \overrightarrow{M'A_i}$ *est un vecteur constant* $\overrightarrow{V}$. En effet, de (1) on déduit

$$\Sigma m_i . \overrightarrow{MA_i} - \Sigma m_i . \overrightarrow{M'A_i} = \overrightarrow{MM'} . \Sigma m_i = 0.$$

On a donc

$$S = S' + 2\overrightarrow{MM'} . \overrightarrow{V}. \tag{7}$$

Si $\overrightarrow{V}$ *n'est pas nul,* on voit, en supposant que M′ reste fixe, que S est

([1]) La formule (5) a, en somme, été établie au n° 184 du Tome I, à propos des moments d'inertie.

une fonction linéaire de la projection de $\overrightarrow{MM'}$ sur $\overrightarrow{V}$ ou, ce qui revient au même, de la distance algébrique de M au plan perpendiculaire à $\overrightarrow{V}$ mené par M'. *Le lieu des points pour lesquels* S *a une valeur donnée est un plan* H *perpendiculaire à* $\overrightarrow{V}$. En particulier, si H_0 désigne le plan correspondant à $S = 0$, on voit que *la valeur de* S *en un point quelconque* M *est égale au produit par* $\pm V$ *de la distance algébrique de* M *à* H_0, *distance comptée positivement suivant le vecteur* $\overrightarrow{V}$.

Dans le cas particulier où $V = 0$, *la somme* S *est constante.*

3. *On considère la droite* D *définie par les équations*

$$(1) \qquad ux + vy + wz + r = 0, \qquad u'x + v'y + w'z + r' = 0.$$

Calculer les six coordonnées d'un vecteur V *porté par cette droite et ayant pour longueur* ρ.

Commençons par calculer les coordonnées plückériennes de D. Pour cela, nous formons les équations de ses projections sur les plans de coordonnées (n° 111). En éliminant x entre les équations (1), nous obtenons la projection sur yOz :

$$y(u'v - uv') - z(w'u - wu') = r'u - ru'.$$

On a deux équations analogues par permutations circulaires. En comparant avec les équations (21) du n° 111, on voit que l'on peut prendre

$$(2) \qquad \alpha = ww' - vw', \qquad \beta = uw' - wu', \qquad \gamma = vu' - uv';$$

$$(3) \qquad l = ur' - u'r, \qquad m = vr' - v'r, \qquad n = wr' - w'r.$$

Les coordonnées du vecteur V sont proportionnelles à ces quantités. Si λ désigne le facteur de proportionnalité, on doit avoir

$$\rho^2 = \lambda^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

D'où $\lambda = \dfrac{\pm\rho}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$, le double signe correspondant aux deux sens qu'on peut donner à V sur la droite D.

4. *Étant donné un système* S *de vecteurs, de coordonnées* X, Y, Z, L, M, N, *on prend son moment résultant* MK *par rapport au point* M. *Quand* M *décrit une droite* D, K *décrit une droite* D'.

1° *Calculer les coordonnées plückériennes* α', β', γ', l', m', n' *de* D' *en fonction des coordonnées plückériennes* α, β, γ, l, m, n *de* D.

2° *Quelle relation doit exister entre ces dernières pour que* D *et* D' *soient dans un même plan* II ?

Si x, y, z sont les coordonnées du point M, celles de K sont (n° 108)

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = x + \mathrm{L} - y\mathrm{Z} + z\mathrm{Y}, \\ y' = y + \mathrm{M} - z\mathrm{X} + x\mathrm{Z}, \\ z' = z + \mathrm{N} - x\mathrm{Y} + y\mathrm{X}. \end{cases}$$

Avant de faire aucun calcul, on peut remarquer que ces formules définissent une transformation homographique (n° 401). Donc, si M décrit une droite D, K décrit certainement une droite D'.

1° Si M décrit D, ses coordonnées sont de la forme (n° 95) $x_0 + \rho\alpha$, $y_0 + \rho\beta$, $z_0 + \rho\gamma$. En portant dans (1), on obtient des expressions de la forme $x'_0 + \rho(\alpha - \beta\mathrm{Z} + \gamma\mathrm{Y})$, ... On en conclut que K décrit une droite D', dont les paramètres directeurs sont

$$(2)\quad \alpha' = \alpha - \beta\mathrm{Z} + \gamma\mathrm{Y}, \qquad \beta' = \beta - \gamma\mathrm{X} + \alpha\mathrm{Z}, \qquad \gamma' = \gamma - \alpha\mathrm{Y} + \beta\mathrm{X}.$$

Nous avons ensuite

$$\begin{aligned} l' = y'\gamma' - z'\beta' = {} & (y + \mathrm{M} - z\mathrm{X} + x\mathrm{Z})(\gamma - \alpha\mathrm{Y} + \beta\mathrm{X}) \\ & - (z + \mathrm{N} - x\mathrm{Y} + y\mathrm{X})(\beta - \gamma\mathrm{X} + \alpha\mathrm{Z}). \end{aligned}$$

Ceci doit pouvoir s'exprimer en fonction de α, β, γ et des quantités l, m, n liées à x, y, z par

$$(3)\qquad l = y\gamma - z\beta, \qquad m = z\alpha - x\gamma, \qquad n = x\beta - y\alpha.$$

Il doit d'ailleurs en être ainsi quels que soient X, Y, Z, L, M, N; donc, ordonnons l' par rapport à ces quantités. Le calcul ne présente aucune difficulté et, en tenant compte de (3), conduit à la formule

$$\begin{aligned} (4)\qquad l' = {} & \mathrm{M}(\gamma - \alpha\mathrm{Y} + \beta\mathrm{X}) - \mathrm{N}(\beta - \gamma\mathrm{X} + \alpha\mathrm{Z}) \\ & + l + \mathrm{Y}n - \mathrm{Z}m + l\mathrm{X}^2 + m\mathrm{XY} + n\mathrm{XZ}. \end{aligned}$$

Le coefficient de α est $-(\mathrm{MY} + \mathrm{NZ})$. Si nous introduisons l'*invariant* (*cf.* Exercice proposé n° 41)

$$(5)\qquad \Omega = \mathrm{LX} + \mathrm{MY} + \mathrm{NZ},$$

ce coefficient s'écrit $\mathrm{LX} - \Omega$. En portant dans (4) et prenant tous les

termes qui contiennent X, on constate qu'ils s'écrivent $X\mathfrak{M}$, en introduisant le moment de S par rapport à D, soit

$$\mathfrak{M} = L\alpha + M\beta + N\gamma + Xl + Ym + Zn. \tag{6}$$

Dès lors, la formule (4) prend une forme assez simple; par permutations circulaires, on obtient, en définitive,

$$\begin{cases} l' = -\Omega\alpha - N\beta + M\gamma + l - Zm + Yn + X\mathfrak{M}, \\ m' = -\Omega\beta - L\gamma + N\alpha + m - Xn + Zl + Y\mathfrak{M}, \\ n' = -\Omega\gamma - M\alpha + L\beta + n - Yl + Xm - Z\mathfrak{M}. \end{cases} \tag{7}$$

Les formules (2), (7) répondent à la première question.

2° Pour que D et D′ soient dans un même plan, il faut et il suffit que l'on ait (1)

$$l\alpha' + m\beta' + n\gamma' + \alpha l' + \beta m' + \gamma n' = 0. \tag{8}$$

Calculons le premier membre, en remplaçant les α', β', ..., n' par (2) et (7). On a d'abord, en se souvenant que

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \tag{9}$$

$$l\alpha' + m\beta' + n\gamma' = \| \; l \quad X \quad \alpha \; \|.$$

Puis

$$\alpha l' + \beta m' + \gamma n' = -\Omega(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \| \; \alpha \quad X \quad l \; \| + \mathfrak{M}(\alpha X + \beta Y + \gamma Z).$$

Portant dans (8) et remarquant que les deux déterminants se détruisent, on obtient la relation demandée sous la forme très simple

$$\mathfrak{M}(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) - \Omega(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0. \tag{10}$$

Elle est homogène et du second degré en $\alpha, \beta, \ldots, n$; elle définit donc un *complexe du second ordre* (n° 394).

5. 1° *Étant donnés un vecteur* V *de coordonnées* X, Y, Z, L, M, N *et une droite* Δ, *de coordonnées plückériennes* α, β, γ, l, m, n, *déterminer un vecteur* V′ *formant avec* V *un système admettant* Δ *pour axe central et un pas donné* h.

2° V *et* Δ *restant fixes, trouver le lieu de* V′ *quand* h *varie.*

---

(1) Leur moment relatif (n° 113) doit être nul.

1° Le système V, V′ doit être équivalent à un torseur, dont le vecteur R a pour directrice Δ et dont le couple K a pour axe hR. Supposant les coordonnées α, β, ... unitaires, appelons ρ la mesure algébrique inconnue de R. Les coordonnées de ce vecteur sont

$$\rho\alpha, \quad \rho\beta, \quad \rho\gamma, \quad \rho l, \quad \rho m, \quad \rho n.$$

Celles du couple K sont

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad h\rho\alpha, \quad h\rho\beta, \quad h\rho\gamma.$$

Celles de V′ sont, par suite,

$$(1)\qquad \begin{cases} X' = \rho\alpha - X, \qquad Y' = \rho\beta - Y, \qquad Z' = \rho\gamma - Z, \\ L' = \rho(l + h\alpha) - L, \qquad M' = \rho(m + h\beta) - M, \\ N' = \rho(n + h\gamma) - N. \end{cases}$$

Écrivons qu'elles satisfont à la relation fondamentale

$$S(\rho\alpha - X)[\rho(l + h\alpha) - L] = 0$$
$$\rho^2 h - \rho[\alpha L + \beta M + \gamma N + lX + mY + nZ + h(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)] = 0,$$

en tenant compte des relations

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \qquad l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \qquad LX + MY + NZ = 0.$$

On tire de là

$$(2)\qquad \rho = \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \frac{\alpha L + \beta M + \gamma N + lX + mY + nZ}{h}.$$

Portant dans (1), on aurait les coordonnées du vecteur V′.

2° Prenons Δ pour axe des z, la perpendiculaire commune à Δ et V pour axe des x. Nous avons alors

$$\alpha = \beta = 0, \qquad \gamma = 1, \qquad l = m = n = 0; \qquad X = 0, \qquad L = 0.$$

La formule (2) devient

$$\rho = Z + \frac{N}{h}.$$

Portant dans (1), il vient

$$X' = 0, \qquad Y' = -Y, \qquad Z' = \frac{N}{h}, \qquad L' = 0, \qquad M' = -M, \qquad N' = Zh.$$

Les équations des plans projetant la droite portant V′ sont (n° 110)

$$y\frac{N}{h}+zY=0,\qquad x\frac{N}{h}=M,\qquad xY=-Zh.$$

L'élimination de h entre les deux dernières conduit à la relation fondamentale $MY+NZ=0$, supposée naturellement vérifiée. L'élimination de h entre les deux premières nous donne, au contraire, le lieu demandé

$$yM+zxY=0. \tag{3}$$

Cette équation représente *un paraboloïde hyperbolique équilatère* (n° 562), d'axe Oy, de sommet O, de plans directeurs xOy et yOz.

Solution géométrique. — Toute droite s'appuyant sur Δ et lui étant perpendiculaire est visiblement de moment nul. Si une telle droite D s'appuie en même temps sur V, elle aura un moment nul par rapport à V + V′ et à V, donc à V′, qu'elle devra rencontrer. Dès lors, V′ doit s'appuyer sur toutes les droites D, en nombre infini, qui rencontrent à la fois V et Δ et sont perpendiculaires à Δ. La surface engendrée par la directrice de V′ est donc *le paraboloïde hyperbolique équilatère* engendré par les droites D.

6. *Quatre vecteurs sont définis de la manière suivante :*

V_1 : *Origine* (2, −3, −1); *angles avec* Ox : 63°, *avec* Oy : 137°, *avec* Oz : *aigu; longueur :* 4,6.

V_2 ; *Origine* (−4, −1, +5); *angles avec* Ox : *aigu*, *avec* Oy : 48°, *avec* Oz : 123°; *longueur :* 5, 7.

V_3 : *Origine* (−1, +2, +7); *extrémité* (3, 46; −2,5; −1).

V_4 : *S'appuie sur* V_1, V_2, Oz, *a pour longueur* 4, 1, *est perpendiculaire à* Ox *et fait un angle obtus avec* Oy.

On demande de calculer :

1° *Les coordonnées de ce système de vecteurs :*

2° *Le torseur équivalent;*

3° *Les éléments de réduction relatifs au point* (−1, +6, −2);

4° *Deux vecteurs formant un système équivalent et dont le premier soit sur la droite :*

$$3x-5y+2z+4=0,\qquad -x+2y+4z-7=0.$$

1° *Coordonnées de* V_1 :

$$X_1 = 4,6\cos 63^\circ = 2,09;$$
$$Y_1 = 4,6\cos 137^\circ = -4,6\cos 43^\circ = -3,36;$$
$$Z_1 = 4,6\sqrt{1-\cos^2 63^\circ - \cos^2 43^\circ} = 4,6\sqrt{0,260} = 2,34;$$
$$L_1 = -3\times 2,34 - 3,36 = -10,38;$$
$$M_1 = -2,09 - 2\times 2,34 = -6,77;$$
$$N_1 = -2\times 3,36 + 3\times 2,09 = -0,45.$$

Coordonnées de V_2 :

$$X_2 = 5,7\sqrt{1-\cos^2 48^\circ - \cos^2 57^\circ} = 2,94,$$
$$Y_2 = 5,7\cos 48^\circ = 3,81; \qquad Z_2 = 5,7\cos 123^\circ = -5,7\cos 57^\circ = -3,16.$$
$$L_2 = 3,16 - 5\times 3,81 = -15,89; \quad M_2 = 5\times 2,94 - 4\times 3,16 = 2,06,$$
$$N_2 = -4\times 3,81 + 2,94 = -12,30.$$

Coordonnées de V_3 :

$$X_3 = 3,46 + 1 = 4,46, \qquad Y_3 = -2,5 - 2 = -4,5;$$
$$Z_3 = -1 - 7 = -8; \qquad L_3 = -2\times 8 + 7\times 4,5 = 15,5;$$
$$M_3 = 7\times 4,46 - 8 = 23,22; \qquad N_3 = 4,5 - 2\times 4,46 = -4,42.$$

Coordonnées de V_4. — On a d'abord $X_4 = 0$, $N_4 = 0$. Portant dans la relation fondamentale et se souvenant que $Y_4 < 0$, on a $M_4 = 0$. Écrivons maintenant que les moments relatifs de V_4 et de V_1 et de V_4 et de V_2 sont nuls (n° 113) :

$$2,09\,L_4 - 6,77\,Y_4 - 0,45\,Z_4 = 0,$$
$$2,94\,L_4 + 2,06\,Y_4 - 12,30\,Z_4 = 0.$$

On tire de là, par la règle du n° 292 du Tome I,

$$\frac{L_4}{84} = \frac{Y_4}{24,4} = \frac{Z_4}{24,2} = \frac{4,1}{-\sqrt{24,4^2 + 24,2^2}},$$

en se rappelant que Y_4 doit être négatif. On a finalement

$$X_4 = 0, \qquad Y_4 = -2,91, \qquad Z_4 = -2,88, \qquad L_4 = -10, \qquad M_4 = N_4 = 0.$$

Coordonnées du système. — Nous ajoutons les coordonnées de même

nom précédemment trouvées :

$$X = +\ 9,49, \qquad Y = -\ 6,96, \qquad Z = -11,70,$$
$$L = -20,77, \qquad M = +18,51, \qquad N = -17,17.$$

2° On a

$$LX + MY + NZ = -125 \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = 275,2;$$

pas :

$$h = -\frac{125}{275,2} = -0,455.$$

Vecteur du torseur :

$$R = \sqrt{275,2} = 16,6;$$

Couple du torseur :

$$\Gamma = hR = -7,56;$$

Projections de l'axe central (n° 123) :

$$-20,77 + 11,70y - 6,96z = -0,455 \times 9,49;$$
$$18,51 - 9,49z - 11,70x = 0,455 \times 6,96;$$
$$-17,17 + 6,96x + 9,49y = 0,455 \times 11,70$$

ou

$$\frac{y}{1,41} - \frac{z}{2,36} = 1; \qquad \frac{z}{1,62} + \frac{x}{1,31} = 1; \qquad \frac{x}{3,23} + \frac{y}{2,37} = 1.$$

3° Le vecteur de réduction est le vecteur R ci-dessus. L'axe du couple de réduction a pour composantes (n° 114) :

$$L' = -20,77 + 6 \times 11,70 + 2 \times 6,96 = 63,1;$$
$$M' = +18,51 + 2 \times 9,49 + 11,70 = 49,2;$$
$$N' = -17,17 - 6,96 + 6 \times 9,49 = 32,8.$$

On peut vérifier que

$$L'X + M'Y + N'Z = LX + MY + NZ = -125.$$

4° Si l'on applique les formules de l'exercice n° 3, on peut prendre pour coordonnées plückériennes de la droite donnée :

$$\alpha = 4 + 4 \times 5 = 24, \qquad \beta = 3 \times 4 + 2 = 14, \qquad \gamma = 5 - 3 \times 2 = -1;$$
$$l = -3 \times 7 + 4 = -17, \qquad m = 5 \times 7 - 4 \times 2 = 27,$$
$$n = -2 \times 7 - 4 \times 4 = -30.$$

Les coordonnées de nos deux vecteurs sont de la forme :

$$24\rho,\quad 14\rho,\quad -\rho,\quad -17\rho,\quad 27\rho,\quad -30\rho;$$
$$9.49-24\rho,\quad -6.96-14\rho,\quad -11.70+\rho,\quad -20.77+17\rho,$$
$$18.51-27\rho,\quad -17.17+30\rho.$$

En écrivant que celles de la seconde ligne satisfont à la relation fondamentale, nous avons, pour déterminer ρ,

$$(9.49-24\rho)(-20.77+17\rho)+(-6.96-14\rho)(18.51-27\rho)$$
$$+(-11.70+\rho)(-17.17+30\rho)=0.$$

Le coefficient de ρ^2 est nul, comme on doit s'y attendre (n° 124); il reste finalement l'équation du premier degré

$$220\rho-125=0;$$

d'où

$$\rho=0,568.$$

En portant dans les expressions ci-dessus, on obtient les coordonnées des deux vecteurs demandés :

Premier vecteur :

$$13.64,\quad 7.95,\quad -0.57,\quad -9.66,\quad 15.36,\quad -17.04;$$

Deuxième vecteur :

$$-4.15,\quad -14,91,\quad -11.13,\quad -11,11,\quad 3.15,\quad -0.13.$$

On peut vérifier qu'elles satisfont bien à la relation fondamentale.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Etant donné un tétraèdre quelconque, comparer les sommes et différences géométriques auxquelles donnent naissance les trois couples d'arêtes opposées.

2. Prouver que les quatre vecteurs qui ont pour origines les sommets d'un tétraèdre et pour extrémités les centres de gravité des faces opposées ont une somme géométrique nulle.

3. Soient un tétraèdre ABCD; E, F, H les milieux de AB, AC, AD; E', F', H' les milieux de CD, DB, BC et enfin G le centre de gravité du

tétraèdre. Démontrer l'égalité géométrique

$$\overrightarrow{EE'} + \overrightarrow{FF'} + \overrightarrow{HH'} = 2\overrightarrow{AG}.$$

$$\left[\text{Partir de } \overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.\right]$$

4. Soient deux droites fixes D et D'. On prend, sur D, deux points variables A et B ayant un milieu fixe et, sur D', deux autres points variables A' et B', de milieu également fixe. Montrer que la somme géométrique $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}$ est constante. Généraliser, en supposant qu'il existe deux points fixes I et I', sur D et D', tels que $\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{I'A'}}{\overline{I'B'}} = \text{const.}$

$$\left[\text{Partir de } \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'A'}, \quad \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{II'} - \overrightarrow{I'B'}.\right]$$

5. Étant donnés n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, affectés des coefficients $m_1, m_2, \ldots, m_n$, étudier comment varie, avec le point M, le vecteur

$$m_1.\overrightarrow{MA_1} + m_2.\overrightarrow{MA_2} + \ldots + m_n.\overrightarrow{MA_n}.$$

(*Cf.* Exercice résolu n° 2.)

6. Effectuer les carrés scalaires de $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{V'}$ et $\overrightarrow{V} - \overrightarrow{V'}$. En déduire les identités

$$(1) \qquad \left[\overrightarrow{V} + \overrightarrow{V'}\right]^2 + \left[\overrightarrow{V} - \overrightarrow{V'}\right]^2 = 2(V^2 + V'^2),$$

$$(2) \qquad \left[\overrightarrow{V} + \overrightarrow{V'}\right]^2 - \left[\overrightarrow{V} - \overrightarrow{V'}\right]^2 = 4\overrightarrow{V}.\overrightarrow{V'},$$

Appliquer ceci, en prenant pour $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ les deux côtés $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ d'un triangle. Que donne en particulier l'identité (1)? (Théorème de la médiane.) Que donne l'identité (2) si l'on prend pour $\overrightarrow{V}$ la médiane $\overrightarrow{AA'}$ et pour $\overrightarrow{V'}$ le demi-côté $\overrightarrow{A'B}$?

7. Étant donnés quatre points quelconques de l'espace A, B, C, M, démontrer l'identité

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0.$$

[*Cf.* Chapitre II, Exercice proposé n° 1. — On a, par exemple, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}$.]

Que peut-on en déduire si l'on prend M à l'intersection de deux hauteurs du triangle ABC ?

8. Étant donné un triangle ABC, on appelle A′, B′, C′ les milieux de BC, CA, AB et G le centre de gravité. Soit, d'autre part, M un point quelconque de l'espace. Démontrer que l'on a

$$(1) \qquad 2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{6}$$

et les deux égalités analogues, en appelant a, b, c les longueurs des côtés BC, CA, AB.

En déduire que les six sphères décrites sur les côtés et les médianes comme diamètre ont deux points communs. En déduire également le théorème suivant de Géométrie plane :

Par l'orthocentre d'un triangle, on mène la perpendiculaire à une médiane et l'on prend ses deux points de rencontre avec le cercle décrit sur le côté opposé à la médiane comme diamètre. Les six points obtenus, de cette manière, en considérant successivement les trois médianes, sont sur un même cercle ayant son centre au centre de gravité.

[Pour établir (1), faire le carré scalaire de $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$, en s'appuyant sur l'Exercice proposé n° 5 et sur l'Exercice résolu n° 2. Si M est un point commun aux trois sphères (BC), (CA) et (AA′), on a $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}=0$, puisque les angles BMC, CMA, AMA′ sont droits. En se servant de la relation (1) et de

$$\overrightarrow{MA'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right),$$

on trouve aisément que M appartient aux trois autres sphères. On a, en outre, $\overrightarrow{MG}^2=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{18}$. Cette relation est d'ailleurs vérifiée pour tous les points d'intersection des sphères (BC) et (AA′) par exemple. Si l'on prend ceux de ces points qui sont dans le plan du triangle, on obtient le deuxième théorème.]

9. Soient deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ fonctions d'une même variable t. Démontrer la formule suivante :

$$\frac{d\left(\vec{U}\cdot\vec{V}\right)}{dt}=\vec{U}\cdot\frac{d\vec{V}}{dt}+\vec{V}\cdot\frac{d\vec{U}}{dt}.$$

Généraliser.

10. *Produit vectoriel.* — Étant donnés deux vecteurs libres $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{U_2}$, donnons-leur une même origine O, d'ailleurs quelconque. Soient alors U_1 et U_2 leurs extrémités. On appelle *produit vectoriel* $\overrightarrow{U_1 \times U_2}$ le moment $\overrightarrow{U_1 U_2, O}$, considéré comme vecteur libre.

Si l'on oriente les plans parallèles aux deux vecteurs au moyen d'un certain axe Δ, montrer que $\overrightarrow{U_1 \times U_2}$ est un vecteur parallèle à Δ, ayant pour mesure algébrique sur cet axe $U_1 . U_2 \sin\theta$, θ désignant l'angle $\left(\widehat{U_1, U_2}\right)$.

Si l'on oriente le périmètre du triangle OU_1U_2 dans le sens défini par $\overrightarrow{OU_1}$, les trois côtés de ce triangle forment un système équivalent à un couple, dont l'axe est le produit $\overrightarrow{U_1 \times U_2}$.

Calculer les composantes du produit $\overrightarrow{U_1 \times U_2}$ en fonction des composantes de $\overrightarrow{U_1}$ et des composantes de $\overrightarrow{U_2}$.

Démontrer les identités suivantes :

$$\overrightarrow{U_1 \times U_2} = -\overrightarrow{U_2 \times U_1}; \qquad \overrightarrow{U_1 \times (U_2 + U_3)} = \overrightarrow{U_1 \times U_2} + \overrightarrow{U_1 \times U_3};$$

autrement dit, l'opération *n'est pas commutative;* mais, elle *est distributive.*

11. Démontrer l'identité de Lagrange (t. I, n° 285) en calculant la longueur du moment $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{MV, O}$.

$$\left[\overline{OK}^2 = \overline{OM}^2 . \overline{MV}^2 . \sin^2\theta = \overline{OM}^2 . \overline{MV}^2 - \left(\overrightarrow{OM} . \overrightarrow{MV}\right)^2\right].$$

11 *bis.* Soient $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{MV, O}$ et $\overrightarrow{OK'} = \overrightarrow{MV', O}$. Démontrer la formule

$$(1) \qquad \overrightarrow{OK} . \overrightarrow{OK'} = \overline{OM}^2 . \left(\overrightarrow{MV} . \overrightarrow{MV'}\right) - \left(\overrightarrow{MO} . \overrightarrow{MV}\right) . \left(\overrightarrow{MO} . \overrightarrow{MV'}\right)$$

ou

$$(2) \qquad \overrightarrow{OK} . \overrightarrow{OK'} = \overline{OM}^2 . MV . MV' (\cos\varphi - \cos\theta \cos\theta'),$$

φ, θ, θ' désignant les angles $\widehat{VMV'}$, $\widehat{OMV}$, $\widehat{OMV'}$.

[Pour démontrer (1), faire le carré scalaire de $\overrightarrow{OK''} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OK'}$, en

s'appuyant sur l'Exercice 11, sur le théorème de Varignon et sur la distributivité du produit scalaire. On peut aussi multiplier les deux matrices (*cf.* t. I, Chap. XXIII, Exercice proposé n° 14) :

$$\left\| \begin{matrix} x & y & z \\ X & Y & Z \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} x & y & z \\ X' & Y' & Z' \end{matrix} \right\|.$$

12. Soit un vecteur V, de coordonnées X, Y, Z, L, M, N.

1° Si $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{V}$, O, montrer que le produit vectoriel $\overrightarrow{V \times OK} = V^2 . \overrightarrow{OH}$, H étant la projection de O sur V. En déduire les coordonnées du point H, puis les coordonnées de la projection d'un point quelconque O′ (x_0, y_0, z_0) sur V.

2° Calculer l'équation du plan (O, V), celle du plan perpendiculaire mené par V et l'équation générale des plans passant par V.

3° Etant donné un plan $ux + vy + wz + r = 0$, écrire les conditions pour que ce plan passe par V. (On écrira qu'il passe par le point à l'infini et par le point H.)

13. Un vecteur a pour origine le point $(2, -5, -4)$. Il fait 75° avec Ox, 38° avec Oy et un angle obtus avec Oz. Enfin, il a pour longueur 26,2. Calculer ses six cordonnées, son angle avec Oz, son moment par rapport au point $(-3, 14, 2)$ et par rapport à la droite

$$3x - y - 5 = 0$$

du plan des xy.

14. Un vecteur est porté par la droite d'équations

$$x - 2y + z + 1 = 0, \qquad 3x - y - z - 2 = 0.$$

Il a pour longueur 4 et fait un angle aigu avec la partie positive de Oz. Calculer ses six coordonnées, les projections sur les axes de son moment par rapport au point $(1, -2, 1)$ et son moment par rapport à la droite qui a pour équations

$$2x + y + z = 0, \qquad x - 4y - z + 5 = 0$$

et dont la direction positive fait un angle aigu avec la direction positive de Ox.

15. Déterminer les vecteurs dont les coordonnées sont de la forme : $1 + 2\lambda$, $2 + 4\lambda$, $-1 - \lambda$, $-3 + 2\lambda$, $2 - \lambda$, $2 - 2\lambda$. Calculer les coordonnées de leurs origines et de leurs extrémités, en supposant que leurs milieux sont dans le plan des xy. Calculer leur moment relatif.

16. On prend le moment d'un vecteur fixe V par rapport à un point O mobile sur une droite fixe D. Où doit se trouver le point pour que le moment soit minimum? Généraliser en remplaçant la droite par une courbe quelconque. En s'appuyant sur le théorème du n° 109, déduire du résultat précédent la position de O qui rend maximum l'angle aigu formé par la droite D avec le plan (O, V).

17. On donne un vecteur et un cercle fixes. Etudier les variations du moment du vecteur par rapport aux tangentes au cercle.

18. Démontrer que le moment relatif de deux vecteurs a pour valeur absolue le produit de leurs longueurs par la plus courte distance de leurs directrices et par le sinus de leur angle.

19. Soient deux plans fixes rectangulaires P et P'. A tout point M de l'espace, on fait correspondre un vecteur V, dont l'origine est en M et l'extrémité au point obtenu en projetant orthogonalement sur P le symétrique de M par rapport à P'.

1° On prend le moment $\overrightarrow{AK}$ de V par rapport à un point donné A de l'espace. Quel doit être le lieu de M pour que AK soit situé dans un plan donné ou sur une droite donnée, passant par A? Montrer qu'il y a deux points M pour lesquels le vecteur $\overrightarrow{AK}$ est entièrement donné à l'avance. Quel est le lieu du point M lorsque $\overrightarrow{AK}$ varie arbitrairement, de manière à rester seulement parallèle à une droite fixe?

2° Trouver le lieu du point M lorsque le moment de V par rapport à une droite fixe D de l'espace demeure constant. Cas où D se trouve dans P ou P' ou bien perpendiculaire à l'intersection de ces deux plans. Cas où le moment est nul.

20. Quelles sont les coordonnées plückériennes de la droite du plan des xy qui a pour coordonnées normales dans ce plan φ et p (n° 65)?

21. On donne deux droites D_1 et D_2 par leurs coordonnées plückériennes. Calculer les coordonnées plückériennes de la droite D qui s'appuie sur D_1, D_2 et passe par un point donné.

22. Montrer, par l'emploi des coordonnées plückériennes, qu'il existe en général deux droites qui s'appuient sur quatre droites données.

23. Quelles relations doivent vérifier les douzes nombres $\alpha, \beta, \ldots, n'$ pour que $\alpha + \lambda\alpha'$, $\beta + \lambda\beta'$, $\gamma + \lambda\gamma'$, $l + \lambda l'$, $m + \lambda m'$, $n + \lambda n'$ soient

les coordonnées plückériennes d'une droite D, quel que soit λ? Montrer que, dans cette hypothèse, la droite D pivote autour d'un point fixe, dans un plan fixe, quand λ varie.

(On pourra s'appuyer sur ce fait que si une droite rencontre deux droites D particulières, elle les rencontre toutes.)

24. On reprend l'exercice résolu n° 4.

1° Calculer l'équation du plan Π connaissant $\alpha, \beta, \ldots n$ et réciproquement.

2° Quelle est la surface engendrée par MK, lorsque la droite D est quelconque? Quelle est la courbe enveloppée par MK, lorsque D et D′ sont dans un même plan?

[Pour 1°, on utilisera l'Exercice 12 (3°). Pour 2°, on prendra D pour Oz, Oy perpendiculaire à la somme géométrique R, O au point de D de moment minimum. Puis, on prendra Π pour xOy, son pôle pour origine et Oy perpendiculaire à R. On pourra faire aussi une *étude géométrique* de la question. On montrera que la perpendiculaire menée par M, dans Π, au moment résultant MK passe par le pôle P de Π; d'où il résulte que D est la *droite conjuguée* de la perpendiculaire Δ en P à Π. Les droites D sont caractérisées par la propriété d'être *perpendiculaire à leur conjuguée*. En prenant M à la projection de P sur D, on voit aussi que les droites D sont les *directrices des moments résultants* par rapport aux différents points de l'espace. On peut dire aussi que *les éléments de réduction par rapport à tout point de* D *forment, avec* D, *deux plans rectangulaires.*

Les droites D *situées dans le plan* Π ne sont autres que les droites MK, d'après la deuxième propriété ci-dessus. Elles enveloppent une parabole de foyer P et de tangente au sommet D. Leurs conjuguées Δ passent par P et décrivent *un cône du second degré* (*cf.* Chap. XXVII, Exercice proposé n° 16).]

25. Reprendre les Exercices 16 et 17, en remplaçant le vecteur fixe par un système de vecteurs.

26. Étant donné un polygone plan, de périmètre orienté, montrer que les vecteurs constitués par ses côtés, supposés orientés dans le sens du périmètre, forment un système équivalent à un couple, dont l'axe a pour mesure algébrique, sur la demi-normale positive du plan, le double de l'aire algébrique limitée par le polygone.

27. Étant donné un polygone gauche, de périmètre orienté, montrer que ses côtés forment un système équivalent à un couple. En déduire

l'existence d'une infinité de polygones tels que chacun d'eux se projette sur tout plan orienté de l'espace suivant un polygone délimitant la même aire algébrique que la projection du polygone gauche.

Un tel polygone plan peut être considéré comme représentant *l'aire du polygone gauche*. Peut-on étendre cette notion à une courbe gauche fermée quelconque ?

Pour une courbe, l'axe du couple a pour composantes les intégrales curvilignes $\int y\,dz - z\,dy, \ldots$.

28. Étant donné un tétraèdre ABCD, on considère le système formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB}$. Quels sont sa somme géométrique et ses moments résultants par rapport aux quatre sommets, au centre de gravité et aux six arêtes du tétraèdre ?

29. Démontrer que si deux systèmes ont mêmes moments résultants par rapport à trois points non en ligne droite, ils sont équivalents. (Considérer la différence des deux systèmes.)

30. Démontrer que si deux systèmes ont mêmes moments résultants par rapport aux six arêtes d'un tétraèdre, ils sont équivalents. (Se ramène à l'exercice précédent.)

31. Étant donnés un tétraèdre ABCD et un système de vecteurs, montrer qu'on peut toujours déterminer six nombres x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 tels que le système $x_1\overrightarrow{AB}$, $x_2\overrightarrow{AC}$, $x_3\overrightarrow{AD}$, $x_4\overrightarrow{BC}$, $x_5\overrightarrow{CD}$, $x_6\overrightarrow{DB}$ soit équivalent au proposé. Ces six nombres sont appelés les *coordonnées tétraédriques du système* (1).

(Se ramène à l'exercice précédent.)

32. Gardant les notations de l'exercice précédent, déterminer les coordonnées tétraédriques des vecteurs qui joignent les milieux des arêtes opposées.

[Prendre le moment relatif (n° 113) du vecteur considéré et de chaque arête du tétraèdre.]

33. Étant donné un système de vecteurs, on prend son moment résultant $\overrightarrow{MK}$ par rapport à un point M. Trouver le lieu des points M et K,

(1) *Voir* à ce sujet l'article suivant : Michoux, *Sur les coordonnées linéaires générales* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, juin 1912).

lorsque la droite MK passe par un point fixe. (Deux cubiques gauches. Prendre le point fixe pour origine.)

34. L'axe d'un couple a pour composantes 53, — 36, 16. Déterminer les deux vecteurs de ce couple, en supposant que l'un d'eux a son origine sur Oz, son extrémité dans xOy, et se trouve dans le plan

$$3x - 2y + 7z + 5 = 0.$$

Calculer le bras de levier, la longueur commune des deux vecteurs, l'équation du plan du couple.

[Les coordonnées du premier vecteur sont déterminées par $Z_1 = \frac{5}{7}$, $3X_1 - 2Y_1 + 7Z_1 = 0$, $53X_1 - 36Y_1 + 16Z_1 = 0$, $L_1 = \frac{5}{7}Y_1$, $M_1 = -\frac{5}{7}X_1$, $N_1 = 0$. On en déduit celles du second.]

35. Un vecteur V_1 a pour origine le point (4, — 1, 2), pour longueur 28 et fait un angle aigu avec Ox, de 110° avec Oy, de 35° avec Oz. Un second vecteur V_2 a pour longueur 42 et pour directrice la droite d'équations

$$3x + y - z + 2 = 0, \qquad -x - 2y + 4z + 5 = 0;$$

il fait, en outre, un angle obtus avec Ox. Enfin, un troisième vecteur V_3 a son origine sur V_1, son extrémité sur V_2 et se trouve dans le plan

$$5x + y - 3z + 4 = 0.$$

Calculer les coordonnées du système formé par ces trois vecteurs, les éléments du torseur équivalent, les éléments de réduction relatifs au point (— 2, 7, — 3), le moment résultant par rapport à la droite du plan des xy qui a pour coordonnées normales, dans ce plan, — 28°, 33. Faire la réduction à deux vecteurs, dont l'un soit porté par cette droite.

36. On réduit un système donné à deux vecteurs V_1 et V_2, dont l'un $\overrightarrow{OV_1}$ a pour origine un point fixe O, mais une orientation variable.

1° Trouver le lieu du point V_1.

2° Montrer que V_2 demeure dans un plan fixe (H).

3° Ce plan (H) étant pris pour plan des xy et le point O pour origine, calculer les coordonnées du point V_1 en fonction des coordonnées normales de la droite D qui porte V_2. En déduire la podaire de l'enveloppe

de D par rapport à O, quand $\overrightarrow{OV_1}$ décrit un cône donné. Quelles sont, en particulier, cette podaire et cette enveloppe, lorsque $\overrightarrow{OV_1}$ garde une grandeur constante a? Nature de l'enveloppe suivant la valeur de a.

4° On prend pour axe des z l'axe central du système, l'axe des x passant par le point O. Calculer, en fonction des coordonnées du point V_1, les coordonnées plückériennes de la perpendiculaire commune à V_1 et V_2, ainsi que les coordonnées du pied de cette perpendiculaire sur OV_1. Lieu de ce pied.

37. Un système de vecteurs admet pour axe central Ox et pour pas k. Par le point A(o, o, h), on mène une droite D perpendiculaire à Oz et d'angle polaire α, relativement à Ox. Par A'(o, o, h'), on mène une autre droite analogue, d'angle polaire α'.

1° Quelles relations doivent exister entre h, h', α, α' pour que les deux droites soient conjuguées (n° 126)?

2° Lieu de ces droites quand elles font entre elles un angle constant V. Nature de la correspondance entre les points A et A'. Cas où $V = \frac{\pi}{2}$.

38. Étant données deux droites D et D', on choisit arbitrairement un vecteur sur D et un vecteur sur D'. Trouver le lieu de l'axe central du système formé par ces deux vecteurs. Calculer le pas du système et montrer qu'il reste constant quand l'axe central reste fixe. Prouver qu'il y a deux axes correspondant à un pas donné et qu'ils sont symétriques l'un de l'autre par rapport à une droite fixe.

39. Soient deux systèmes de vecteurs S et S'. On multiplie tous les vecteurs du premier par un nombre arbitraire λ et ceux du second par un autre nombre arbitraire μ. On obtient de la sorte le système $\lambda S + \mu S'$. Montrer que les systèmes qui ont un pas donné se répartissent en deux familles, pour chacune desquelles l'axe central est fixe. Cas où le pas est nul. Quel est le lieu de l'axe central, lorsque λ et μ varient arbitrairement?

(Comparer avec l'Exercice précédent.)

40. Soit un trièdre trirectangle $Oxyz$. On considère trois torseurs: A d'axe Ox et de pas a, B d'axe Oy et de pas b, C d'axe Oz et de pas c. Quel est le lieu de l'axe central du système $\lambda A + \mu B + \nu C$, lorsque λ, μ, ν varient arbitrairement, sous la seule condition que le pas garde une valeur constante h? Variation de ce lieu avec h.

41. Mêmes questions pour le système constitué par trois vecteurs arbitraires portés par trois droites fixes.

(A propos des questions 38 à 41, le lecteur pourra consulter un article de l'auteur dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1910, p. 343 et suiv.)

42. *Invariants.* — Étant donné un système S, de coordonnées X, Y, Z, L, M, N, les expressions $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ et $\Omega = LX + MY + NZ$ sont des *invariants* pour tout changement des axes de coordonnées, ainsi qu'il résulte de leurs significations géométriques. Le vérifier, en établissant au préalable les formules du changement de coordonnées.

Étant donné un deuxième système S', si l'on forme les expressions R^2 et Ω pour le système $S + \lambda S'$, on obtient des invariants, quel que soit λ. En prenant le coefficient de λ, on obtient les *invariants simultanés* $XX' + YY' + ZZ'$ et $LX' + MY' + NZ' + XL' + YM' + ZN'$. Quelles sont leurs significations géométriques ? Le second s'appelle le *moment relatif des deux systèmes*. C'est six fois la somme algébrique des tétraèdres $A_i B_i B'_j A'_j$. En particulier, si S' est identique à S, on a l'*automoment* 2Ω du système S.

43. *Théorie géométrique des vecteurs glissants.* — On peut suivre la marche suivante :

1° Établir

$$\overrightarrow{AB,O} = \overrightarrow{AB,O'} + \overrightarrow{O'C,O} \qquad \left(\overrightarrow{O'C} = \overrightarrow{AB}\right) \tag{1}$$

(Amener, par glissement, A et O' dans le plan P mené par O perpendiculairement à AB. Supposer AB = 1. Les trois moments se déduisent alors des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{O'A}$, $\overrightarrow{OO'}$ par des rotations de $-\frac{\pi}{2}$. Le raisonnement s'achève aisément.)

2° Établir la propriété fondamentale du moment par rapport à une droite D, en appliquant 1° à deux points O et O' pris sur D.

3° Montrer que le moment relatif de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ est égal à 6 Vol. ABB'A'.

4° Démontrer le théorème de Varignon pour deux vecteurs

$$\overrightarrow{OV_1,M} + \overrightarrow{OV_2,M} = \overrightarrow{OV,M} \qquad \left(\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OV_1} + \overrightarrow{OV_2}\right). \tag{2}$$

[Prendre M successivement en O, V_1, V_2; puis, n'importe où en dehors du plan V_1OV_2, en projetant sur MO, MV_1, MV_2 et s'appuyant

sur 2°; enfin n'importe où dans le plan V_1OV_2 en projetant (2) sur la perpendiculaire à ce plan, M étant pris sur cette perpendiculaire.]

5° Théorème de Varignon pour n vecteurs.

6° (3) $$\overrightarrow{S,O} = \overrightarrow{S,O'} + \overrightarrow{O'R,O}.$$

[S'appuyer sur (1) et sur le théorème de Varignon.]

7° Propriétés et composition des couples; réduction d'un système à un vecteur et à un couple. (*Cf.* n^os^ 119 et 120.)

8° La projection de $\overrightarrow{S,O}$ sur OR est constante.

(Résulte de 6°.)

9° Partant de la réduction en un point quelconque, trouver l'axe central.

10° Pour qu'un système soit équivalent à un vecteur unique, il faut et il suffit que les éléments de réduction relatifs à un point quelconque soient rectangulaires.

11° Réduction à deux vecteurs, dont l'un sur une droite donnée D.

[Réduire à $\overrightarrow{OR}$ et au couple $\overrightarrow{OK}$, O étant pris sur D. Mener, par R, le plan perpendiculaire à OK, il coupe D au point V_1 : $\overrightarrow{OV_1}$ est le premier vecteur. On cherche ensuite l'axe central du système $S - \overrightarrow{OV_1}$ et l'on a le second vecteur.]

12° Système de vecteurs parallèles.

(Prendre d'abord deux vecteurs et chercher un point de leur plan, par rapport auquel le moment résultant est nul. Puis, pour n vecteurs, raisonner par récurrence.)

CHAPITRE IX.

RAPPORT ANHARMONIQUE. HOMOGRAPHIE; INVOLUTION.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Sur une droite, on donne quatre points fixes* A, B, A′, B′. *Déterminer deux points* M, M′ *tels que*

$$(1) \qquad (ABMM') = k, \qquad (A'B'MM') = k',$$

k et k′ désignant deux nombres donnés.

Il y a deux solutions M_1, M_1' *et* M_2, M_2'. *Montrer que, quels que soient k et k′, les segments* M_1M_2' *et* $M_1'M_2$ *sont conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes. Montrer qu'il en est de même des segments* M_1M_1' *et* M_2M_2', *sous la condition que le rapport anharmonique* $(1, \infty, k, k')$ *demeure constant, et des segments* $M_1M_2, M_1'M_2'$, *sous la condition* $(1, 0, k, k') = \text{const.}$, *0 désignant un nombre fixe. Quelle valeur doit avoir 0 pour que le segment fixe qui divise harmoniquement* M_1M_2 *soit le même que celui qui divise harmoniquement* $M_1'M_2'$?

Une première question à résoudre est le choix du paramètre au moyen duquel on va déterminer la position d'un point quelconque de la droite donnée. L'idée qui vient tout d'abord à l'esprit consiste à prendre tout simplement l'abscisse de ce point, en laissant l'origine arbitraire, afin de ne pas détruire la symétrie entre les points fixes donnés. Mais, on devine que les calculs seront compliqués.

Une autre méthode consisterait à déterminer chaque point P par le rapport $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$; mais cela ferait jouer à A et B un rôle particulier. Ce procédé nous semble cependant devoir donner des calculs assez simples. Libre au lecteur d'en tenter l'application.

La troisième idée, que nous allons suivre, est celle-ci. Les points (A, B) et (A′, B′) déterminent une involution (n° 141). Soient E, F ses points doubles. Nous fixerons la position de chaque point P par le rapport

$\frac{\overline{PE}}{\overline{PF}} = t$. Il est clair que, de cette façon, nous conservons toute la symétrie des données.

Les points A et B, ainsi que A′ et B′, sont conjugués harmoniques par rapport à EF (n° 141). Nous poserons donc

$$(2)\qquad \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = m, \qquad \frac{\overline{BE}}{\overline{BF}} = -m; \qquad \frac{\overline{A'E}}{\overline{A'F}} = m', \qquad \frac{\overline{B'E}}{\overline{B'F}} = -m'.$$

Soit maintenant

$$(3)\qquad \frac{\overline{ME}}{\overline{MF}} = t, \qquad \frac{\overline{M'E}}{\overline{M'F}} = t'.$$

Comme l'abscisse de M est fonction homographique de t (n° 23), les équations (1) peuvent s'écrire (n° 130)

$$(4)\qquad (m, -m, t, t') = k, \qquad (m', -m', t, t') = k'$$

ou, tous calculs faits,

$$(5)\qquad \begin{cases} (tt' - m^2)(1-k) + (t-t')m(1+k) = 0, \\ (tt' - m'^2)(1-k') + (t-t')m'(1+k') = 0, \end{cases}$$

ou encore, en posant, pour abréger l'écriture [1],

$$(6)\qquad \frac{m(1+k)}{1-k} = h, \qquad \frac{m'(1+k')}{1-k'} = h',$$

$$(7)\qquad \begin{cases} tt' + h(t-t') = m^2, \\ tt' + h'(t-t') = m'^2. \end{cases}$$

De ces équations, on tire [2]

$$(8)\qquad t - t' = \frac{m^2 - m'^2}{h - h'} = p, \qquad tt' = \frac{hm'^2 - h'm^2}{h - h'} = q.$$

Puis

$$(9)\qquad t + t' = \pm\sqrt{p^2 + 4q} = \pm r.$$

---

[1] Nous supposons $k \neq 1$ et $k' \neq 1$. Si $k = 1$, par exemple, M et M′ doivent être confondus et l'on doit avoir aussi $k' = 1$. Ce cas est évidemment sans intérêt.

[2] Nous écartons l'hypothèse $h = h'$, qui exige $m^2 = m'^2$; d'où $m = m'$, $k = k'$ ou bien $m = -m'$, $k = \frac{1}{k'}$. Les points A′, B′ se confondent avec A, B ou avec B, A et les deux équations (1) sont identiques. Le problème n'a plus d'intérêt.

D'où les deux solutions

$$(10)\quad t_1=\frac{p+r}{2},\qquad t'_1=\frac{r-p}{2};\qquad t_2=\frac{p-r}{2},\qquad t'_2=\frac{-r-p}{2}.$$

On aperçoit de suite les relations

$$(11)\qquad t_1+t'_2=0,\qquad t_2+t'_1=0.$$

Elles expriment que *les segments* $M_1M'_2$, $M_2M'_1$ *sont conjugués harmoniques par rapport aux points* E, F, lesquels sont bien indépendants de k, k'.

Si l'on a

$$(12)\qquad (1,-1,k,k')=\text{const.}$$

ou

$$\frac{k-1}{k+1}:\frac{k'-1}{k'+1}=\text{const.}$$

ou, d'après (6), $\frac{h}{h'}=$ const., la deuxième équation (8) nous montre que $q=$ const. $=\alpha^2$. D'où il suit que *les segments* $M_1M'_1$ et $M_2M'_2$ *sont conjugués harmoniques par rapport aux points fixes* C, C' *définis par*

$$(13)\qquad \frac{\overline{CE}}{\overline{CF}}=\alpha,\qquad \frac{\overline{C'E}}{\overline{C'F}}=-\alpha.$$

Ces deux points sont eux mêmes conjugués harmoniques par rapport à EF; autrement dit, ils appartiennent à l'involution définie par (A, B), (A', B').

Pour que M_1, M_2 *soient conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes*, il faut et il suffit que t_1, t_2 soient conjugués harmoniques par rapport à deux nombres fixes ou qu'ils soient reliés par une relation homographique involutive :

$$(14)\qquad At_1t_2+B(t_1+t_2)+C=0$$

ou, d'après (10) et (9),

$$(15)\qquad -Aq+Bp+C=0$$

ou

$$(16)\qquad A(h'm^2-hm'^2)+B(m^2-m'^2)+C(h-h')=0.$$

D'autre part, l'égalité

$$(17)\qquad (1,0,k,k')=\lambda=\text{const.}$$

peut s'écrire, en posant $\omega = \frac{1-\theta}{1-\vartheta}$ (t. I, n° 322),

$$\left(\infty, \omega, \frac{h}{m}, \frac{h'}{m'}\right) = \lambda.$$

ou (t. I, n° 318, théorème I)

$$\left(\frac{h'}{m'}, \frac{h}{m}, \omega, \infty\right) = \lambda.$$

ou

$$\omega - \frac{h'}{m'} = \lambda\left(\omega - \frac{h}{m}\right). \tag{18}$$

Les relations (16) et (18) sont toutes deux linéaires en h, h'; on peut les identifier, en posant

$$A = \frac{\lambda m' - m}{mm'}, \qquad C = \lambda m - m', \qquad B = \omega(1-\lambda).$$

Autrement dit, si l'on a (17), on a aussi

$$\frac{(\lambda m' - m)}{mm'} t_1 t_2 + \omega(1-\lambda)(t_1 + t_2) + \lambda m - m' = 0. \tag{19}$$

Les points M_1, M_2 *sont conjugués harmoniques par rapport aux points fixes* Q, Q', dont les t sont donnés par l'équation

$$\frac{\lambda m' - m}{mm'} t^2 + 2\omega(1-\lambda) t + \lambda m - m' = 0. \tag{20}$$

Les t des points M'_1, M'_2 étant $-t_2$, $-t_1$, ils vérifient la relation déduite de (19) par le changement de ω en $-\omega$. Ils sont donc conjugués harmoniques par rapport aux points R, R', dont les t sont donnés par

$$\frac{\lambda m' - m}{mm'} t^2 - 2\omega(1-\lambda) t + \lambda m - m' = 0 \tag{21}$$

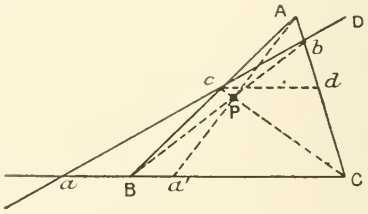
et qui sont eux-mêmes conjugués des points Q, Q' par rapport à E, F.

Pour que R, R' *se confondent avec* Q, Q', il faut et il suffit que l'on ait $\omega = 0$ (en supposant $\lambda \neq 1$), c'est-à-dire $\vartheta = -1$. Dans ce cas, le segment QQ' (ou RR') divise harmoniquement EF, car les racines de (20) [ou (21)] sont opposées.

2. *Théorèmes de Ménélaüs et de Céva. Pôles et polaires trilinéaires.*

— On peut démontrer élégamment, à l'aide du rapport anharmonique, les théorèmes de Ménélaüs (Chap. VI, Exercice proposé n° 9) et de Céva (*ibid.*, Exercice résolu n° 4).

Fig. 7.



Soient le triangle ABC (*fig.* 7) et la transversale D. Je dis que

$$\frac{\overline{aB}}{\overline{aC}}\,\frac{\overline{bC}}{\overline{bA}}\,\frac{\overline{cA}}{\overline{cB}} = 1. \tag{1}$$

Ceci peut s'écrire

$$\frac{\overline{aB}}{\overline{aC}} = \frac{\overline{bA}}{\overline{bC}} : \frac{\overline{cA}}{\overline{cB}}. \tag{2}$$

Menons cd parallèle à BC; nous avons

$$\frac{\overline{cA}}{\overline{cB}} = \frac{\overline{dA}}{\overline{dC}}.$$

Moyennant quoi, (2) devient

$$\frac{\overline{aB}}{\overline{aC}} = \frac{bA}{\overline{bC}} : \frac{\overline{dA}}{\overline{dC}} = (AC\,bd)$$

ou

$$(BC\,a\infty) = (AC\,bd).$$

Or, cette égalité est vraie, car les deux membres sont égaux au rapport anharmonique du faisceau $c(BC\,ad)$.

Démontrons maintenant le théorème de Céva. Je dis que l'on a

$$\frac{\overline{a'B}}{\overline{a'C}}\,\frac{\overline{bC}}{\overline{bA}}\,\frac{\overline{cA}}{\overline{cB}} = -1. \tag{3}$$

En effet, joignons bc. La droite AP est la polaire de a par rapport à BAC (n° 133). Donc, a' est conjugué harmonique de a par rapport

à BC et l'on a

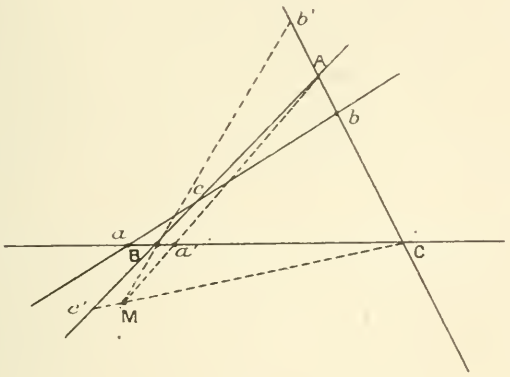
$$\frac{\overline{a'B}}{\overline{a'C}} = -\frac{\overline{aB}}{\overline{aC}}. \tag{4}$$

Dès lors, (3) revient à (1).

Les réciproques se déduisent sans peine des propositions directes, en s'appuyant sur ce fait qu'il n'y a qu'un point qui divise un segment donné dans un rapport donné (1).

Reprenons la transversale D (*fig.* 8). Soient a', b', c' les conjugués

Fig. 8.



harmoniques de a, b, c par rapport à BC, CA, AB. On a la relation (1) et les relations telles que (4). On en déduit

$$\frac{\overline{a'B}}{\overline{a'C}}\,\frac{\overline{b'C}}{\overline{b'A}}\,\frac{\overline{c'A}}{\overline{c'B}} = -1. \tag{5}$$

Donc, les trois droites Aa', Bb', Cc' concourent en un certain point M. Ce point M est appelé *le pôle trilinéaire de la droite* D.

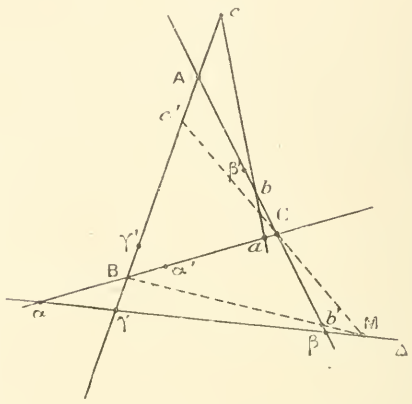
Inversement, si l'on partait du point M, on arriverait à la droite D, qui est dite *la polaire trilinéaire de* M.

Cherchons l'enveloppe de D, *quand* M *décrit une droite donnée* Δ (*fig.* 9). Je dis que les points b, c décrivent des divisions homographiques sur AC et AB. En effet, la correspondance est évidemment

(1) Par exemple, si l'on a (1), bc coupe BC en un point a_1, qui donne lieu à la même égalité, d'où résulte $\frac{\overline{a_1B}}{\overline{a_1C}} = \frac{\overline{aB}}{\overline{aC}}$; donc a_1 coïncide avec a.

algébrique. En outre, si l'on se donne b, on en déduit b', conjugué de b par rapport à AC. Joignant Bb', on a M, au point de rencontre avec Δ.

Fig. 9.



Joignant CM, on a c', au point de rencontre avec AB; d'où l'on déduit c, conjugué de c' par rapport à AB. Une construction analogue donnerait b, en partant de c. Il y a donc bien correspondance homographique (n° 136).

Voyons si le point de rencontre A des deux bases est à lui-même son homologue. Si b vient en A, il en est de même de b' (n° 129); M vient en γ sur AB, ainsi que c'; c vient en γ' conjugué de γ par rapport à AB. Pour que γ' soit en A, il faut et il suffit que γ s'y trouve aussi, c'est-à-dire que Δ passe par A. Dans ce cas, D passe par un point fixe. D'ailleurs, MA coïncide constamment avec Δ, a' est toujours en α et a en α', qui est le point fixe (1). On voit donc que *si la droite* Δ *passe par un sommet* A *du triangle*, D *passe constamment par le point* α' *conjugué harmonique, par rapport à* BC, *du point* α *où* Δ *rencontre* BC.

Ce cas particulier étant écarté, l'enveloppe de D est une conique. Cette conique est tangente en γ' à AB et, par raison de symétrie, en β' à AC et en α' à BC. Observons d'ailleurs que $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ concourent au pôle trilinéaire de Δ. Donc, *si* Δ *ne passe par aucun sommet du triangle, l'enveloppe de* D *est une conique* F *tangente à chaque côté du triangle au point où ce côté rencontre la droite joignant le sommet opposé au pôle trilinéaire de* Δ.

Le lecteur démontrera, d'une manière analogue, par l'usage des

(1) Le lecteur est prié de faire la figure, dans ce cas particulier.

faisceaux homographiques BM, CM, les propositions corrélatives (n° 299) suivantes :

Si D *passe par un point fixe* P *situé sur un côté* BC *du triangle,* M *décrit la droite joignant le sommet opposé* A *au point conjugué harmonique de* P *par rapport à* BC.

Si D *passe par un point fixe* P *situé en dehors de tout côté du triangle,* M *décrit une conique* Σ *circonscrite au triangle et tangente en chaque sommet à la droite joignant ce sommet au point de rencontre du côté opposé avec la polaire trilinéaire de* P.

Il pourra aussi démontrer les réciproques de ces différentes propositions et considérer les cas particuliers suivants :

1° Δ est à l'infini;
2° Δ passe par deux pieds de bissectrices ou par le centre de gravité;
3° P est au centre de gravité ou à l'infini;
4° M décrit le cercle circonscrit.

Si Γ_∞ est la conique Γ qui correspond à la droite Δ prise à l'infini, on a les points à l'infini de la conique Σ, en menant, du point P, les tangentes à Γ_∞. Il s'ensuit que Σ est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que P est intérieur à, extérieur à ou sur la conique Γ_∞.

3. *Soient un triangle* ABC *et un point* O *de son plan. On prend les points* A′ *sur* BC, B′ *sur* CA, C′ *sur* AB. *Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que ces trois points soient en ligne droite est que les trois couples de rayons* (OA, OA′), (OB, OB′), (OC, OC′) *appartiennent à une même involution* (Chasles).

1° *La condition est nécessaire.* — Supposons les points en ligne droite. Les trois couples de rayons (OA, OA′), (OB, OB′), (OC, OC′) définissent une homographie. Pour que cette homographie soit une involution, il faut et il suffit que le couple de rayons (OA′, OA) soit un quatrième couple de rayons homologues (n° 140). Or, pour cela, il faut et il suffit que l'on ait

$$(1) \qquad O(ABCA') = O(A'B'C'A).$$

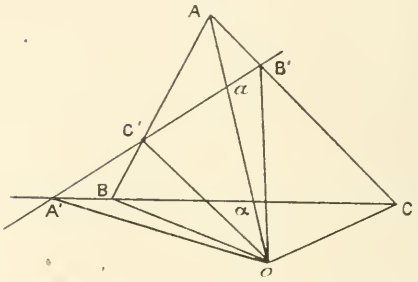
Or, on a successivement (*fig.* 10)

$$O(A'B'C'A) = (A'B'C\,a) = A(A'B'C\,a) = (A'CB\,\alpha) = O(A'CBA).$$

L'égalité (1) revient donc à

$$O(ABCA') = O(A'CBA),$$

Fig. 10.



ce qui est exact, en vertu du théorème I du n° 318 du Tome I, appliqué à un faisceau de droites.

2° *La condition est suffisante.* — Supposons-la remplie. Soit C'' le point où A'B' rencontre AB. D'après 1°, le rayon OC'' est homologue de OC dans l'involution définie par les deux couples (OA, OA') et (OB, OB'). Par hypothèse, OC' est homologue de OC dans la même involution. Donc OC'' et OC' coïncident, donc aussi C'' et C'. Autrement dit, A', B', C' sont en ligne droite. C. Q. D. F.

Applications. — Si l'on mène OA' perpendiculaire à OA, OB' perpendiculaire à OB, OC' perpendiculaire à OC, on retrouve l'Exercice proposé n° 12 du Chapitre VI.

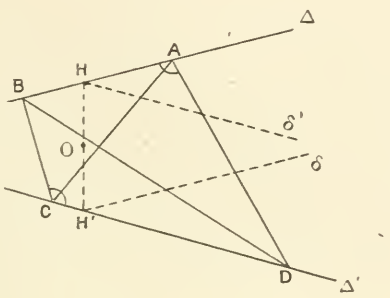
Si l'on mène OA', OB', OC' symétriques de OA, OB, OC, par rapport à une même droite Oλ, on retrouve l'Exercice proposé n° 13 du même Chapitre.

4. *On donne deux droites fixes* Δ *et* Δ' *non situées dans un même plan et non perpendiculaires. Un quadrilatère gauche variable a un côté* AB *sur* Δ *et un côté* CD *sur* Δ'. *Les côtés* BC, AD *sont perpendiculaires. Les angles* A *et* C *sont droits. Lieux des diagonales.*

Lieu de AC. — BC est perpendiculaire à CD et à AD, donc au plan CAD. De même, AD est perpendiculaire au plan ABC. Les plans ACΔ et ACΔ' sont donc perpendiculaires entre eux, puisque chacun d'eux contient une perpendiculaire à l'autre. Ils décrivent, par suite,

deux faisceaux homographiques et leur intersection AC *engendre une surface du second degré* (S) (n° 147), passant par Δ et Δ′.

Fig. 11.



Si A est à l'infini sur Δ, le plan Δ′A est parallèle à Δ; donc BC est perpendiculaire à la fois à Δ et à Δ′; c'est la perpendiculaire commune HH′. Le point C est alors en H′ et AC est la parallèle H′δ à Δ, menée par H′. On verrait de même que la surface (S) contient Hδ′, parallèle à Δ′. C'est donc un *hyperboloïde à une nappe*, admettant les plans ΔHH′ et Δ′H′H pour plans asymptotes (n° 556). Les génératrices de contact de ces plans avec le cône asymptote sont, d'ailleurs, la droite équidistante de Δ et δ, pour le premier et la droite équidistante de Δ′ et δ′, pour le second. Ces deux droites se rencontrent au point O, *milieu de* HH′, *qui est le centre de* (S).

Le plan tangent en H est ΔHδ′, perpendiculaire à OH. *Le point* H *est donc un sommet;* de même H′.

Les plans perpendiculaires à Δ *et les plans perpendiculaires à* Δ′ *sont des plans cycliques* (n° 480). Soit, en effet, (P) un plan perpendiculaire à Δ. Il rencontre Δ en E, Δ′ en E′. Soient EM et E′M les traces de deux plans perpendiculaires quelconques passant le premier par Δ, le second par Δ′. Le plan ΔEM est perpendiculaire à (P) et à Δ′E′M; il est donc perpendiculaire à leur intersection E′M. Il s'ensuit que E′M est perpendiculaire à EM. Le lieu du point M est donc le cercle décrit sur EE′ comme diamètre, dans le plan (P).

Lieu de BD. — Je dis que B et D décrivent, sur Δ et Δ′, deux divisions homographiques. En effet, donnons-nous le point B. En le projetant sur Δ′, nous avons C. Le plan perpendiculaire en C à BC coupe ensuite Δ en A. Menant enfin par A la perpendiculaire au plan ABC, nous obtenons le point D, par sa rencontre avec Δ′. A un point B correspond donc un seul point D. De même, on verrait qu'à un point D correspond un seul point B. Les constructions précédentes étant toutes

algébriques, nous avons bien une correspondance homographique. *Le lieu de* BD *est donc une surface du second degré* (S') (n° 147), passant par Δ et Δ'.

Si B va à l'infini sur Δ, C va à l'infini sur Δ' et nous avons vu que A vient en H. Le plan ABC est alors $\Delta H\delta'$; donc AD, qui lui est perpendiculaire, vient en HH', D en H' et DB en H'δ. On verrait de même que si D va à l'infini sur Δ', BD vient en Hδ'. *La surface* (S') *a donc en commun avec* (S) *les quatre droites* Δ, Δ', δ, δ'. Elle a, par suite, même centre O.

Remarque. — Les points H et H' étant les homologues des points à l'infini, aussi bien pour les divisions (A, C) que pour les divisions (B, D), on en conclut (n° 138) que les produits $\overline{HA}.\overline{H'C}$ et $\overline{HB}.\overline{H'D}$ demeurent tous deux constants. Ceci peut encore s'interpréter en disant que les volumes des deux tétraèdres HAH'C et HBH'D demeurent constants.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Sur une droite fixe, on donne trois points fixes A, B, C et un point variable M. Étudier les variations du rapport anharmonique (ABCM).

2. Sur une droite fixe, on donne deux points fixes A, B et deux points variables M, M'. Étudier les variations du rapport anharmonique $y = (ABMM')$, sachant que :

1° Le milieu de MM' reste fixe.

2° La longueur MM' demeure constante.

3° Le segment MM' est conjugué harmonique par rapport à un segment fixe.

Montrer que, dans chacune de ces trois hypothèses, à une valeur donnée de y correspondent deux segments $M_1M'_1$ et $M_2M'_2$. Prouver que, lorsque y varie, M_1M_2 et $M'_1M'_2$ restent conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes.

3. On projette orthogonalement les quatre sommets d'un rectangle sur une droite variable. Étudier les variations du rapport anharmonique de ces projections.

4. Pour que trois points α, β, γ soient en ligne droite, il faut et il suffit qu'on ait

$$P(Q\alpha\beta\gamma) = Q(P\alpha\beta\gamma),$$

P et Q étant deux points quelconques du plan tels que la droite PQ ne passe par aucun des points donnés.

5. Trouver, dans le plan, un système de neuf points tels que la droite qui joint deux quelconques d'entre eux en contienne un troisième et un seulement (1).

[Numérotons les points 1, 2, ..., 9 et appelons droites D les droites qui les joignent trois à trois. Par chaque point passent 4 droites D. Il y a en tout 12 droites D. Soit 123 l'une d'elles. Par 4, il en passe une qui ne contient ni 1, ni 2, ni 3; numérotons-là 456. Puis, numérotons les droites issues de 1 : 123, 147, 158, 169. La droite 24 passe ensuite par 8 ou 9 et 34 par 9 ou 8. Quitte à échanger 2 et 3, où peut supposer 248, 259, 267. Toutes les autres droites D sont alors numérotées; voici leur tableau :

$$123,\ 147,\ 158,\ 169,\ 248,\ 259,\ 267,\ 349,\ 357,\ 368,\ 456,\ 789.$$

Les faisceaux 1(2456) et 2(1456) ont même rapport anharmonique ρ. D'autre part,

$$1(2456) = 1(2789) = 2(1789) \text{ et } 2(1456) = 2(189\overline{7}) = 1 - \frac{1}{2(1789)}$$

(t. I, n° 319). D'où

$$\rho = 1 - \frac{1}{\rho} \qquad \text{ou} \qquad \rho^2 - \rho + 1 = 0,$$

dont les racines sont $-j$ et $-j^2$, en désignant par j une racine cubique imaginaire de l'unité (t. I, n° 36). Donc, *les quatre droites* D *issues d'un des neuf points ont pour rapports anharmoniques* $-j$ *et* $-j^2$.

La droite 123 est rencontrée en m' par 456 et m'' par 789. On a $(123m') = 4(1235) = -j$, par exemple. Puis

$$(123m'') = 7(1238) = 7(4638); \qquad -j = 4(7836):$$

d'où

$$(123m'') = \frac{j}{-j^2} = -j^2.$$

Ces propriétés nécessaires étant établies, on peut construire les neuf points de la manière suivante : On prend arbitrairement 123; puis, on construit m' et m''. On choisit arbitrairement les droites D' issue de m' et D'' issue de m'' et enfin le point 4 sur D'. On peut alors trouver les neuf points et huit des douze droites. Il reste à prouver l'existence des

(1) Cette propriété appartient aux *points d'inflexion d'une cubique* (n° 569).

quatre droites 259, 368, 158, 169. Pour 259, par exemple, il suffit de remarquer que $4(7259) = (12m'3) = -j^2 = (123m'') = 7(4259)$].

5 *bis*. Soit un triangle ABC, un point P et une droite Δ passant par P et rencontrant BC, CA, AB en a, b, c. Démontrer que

$$(Pabc) = P(\Delta ABC).$$

(Projeter $Pabc$ sur BC, à partir de A.)

6. Soient deux segments AB, de milieu I, A'B', de milieu I', portés par la même droite. Démontrer que la condition pour qu'ils soient conjugués harmoniques peut s'écrire

$$\overline{AB}.\overline{AI'} = \overline{AA'}.\overline{AB'} \quad \text{ou} \quad \overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2 = 4\,\overline{II'}^2.$$

7. Démontrer que l'orthocentre et le centre de gravité d'un triangle sont conjugués harmoniques par rapport aux centres du cercle circonscrit et du cercle des neuf points.

8. Étant donnés deux segments AB et A'B' sur une même droite, déterminer un segment MN qui les divise tous deux harmoniquement. Démontrer qu'il est réel ou imaginaire, suivant que les segments proposés n'empiètent pas ou empiètent l'un sur l'autre.

Indiquer une construction géométrique. (Le milieu de MN doit avoir même puissance par rapport à tous les cercles qui passent par A et B ou A' et B'.)

9. Soit un quadrilatère ABCD, dont les diagonales AC, BD se coupent au point O. Une droite variable pivote autour de ce point. Elle rencontre AD en α, BC en β. Démontrer que le produit $\dfrac{\overline{\alpha A}}{\overline{\alpha D}}\,\dfrac{\overline{\beta B}}{\overline{\beta C}}$ demeure constant.

[Évaluer de deux manières différentes le rapport anharmonique du faisceau $O(AD\alpha O')$, O' désignant le point de rencontre de AD, BC.]

10. Soit un triangle ABC. La droite qui joint les pieds des hauteurs issues de B et de C rencontre BC en un point a. Montrer que les trois points a, b, c sont en ligne droite. (Polaire trilinéaire de l'orthocentre.)

11. Étant donné un faisceau de quatre droites $S\lambda_1$, $S\lambda_2$, $S\lambda_3$, $S\lambda_4$,

démontrer la formule

$$S(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4) = \frac{\sin(\widehat{S\lambda_3, S\lambda_1})}{\sin(\widehat{S\lambda_3, S\lambda_2})} : \frac{\sin(\widehat{S\lambda_4, S\lambda_1})}{\sin(\widehat{S\lambda_4, S\lambda_2})}.$$

Cas où deux des droites sont rectangulaires.

12. Démontrer que la condition d'harmonie des angles $\widehat{\lambda_1 S\lambda_2}$, $\widehat{\lambda_3 S\lambda_4}$ peut s'écrire

$$\cos(\widehat{\lambda_1 S\lambda_2})\cos(\widehat{\lambda_3 S\lambda_4}) = \cos 2(\widehat{\mu S\mu'}),$$

en appelant $S\mu$ la bissectrice de $\widehat{\lambda_1 S\lambda_2}$ et $S\mu'$ la bissectrice de $\widehat{\lambda_3 S\lambda_4}$. Cas où $S\lambda_1$ et $S\lambda_2$ sont perpendiculaires.

13. Soit le faisceau défini par l'équation quadratique

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$

Démontrer que si A, B, C varient en demeurant liés par une relation linéaire à coefficients constants, le faisceau reste conjugué harmonique par rapport à deux droites fixes.

[Identifier la relation donnée avec la condition d'harmonie $AC' + CA' - 2BB' = 0$.]

14. Vérifier que le faisceau

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \lambda(x^2 - y^2) = 0$$

a des bissectrices fixes, lorsque λ varie.

15. Calculer les bissectrices du faisceau $18x^2 - 35xy + 3y^2 = 0$.

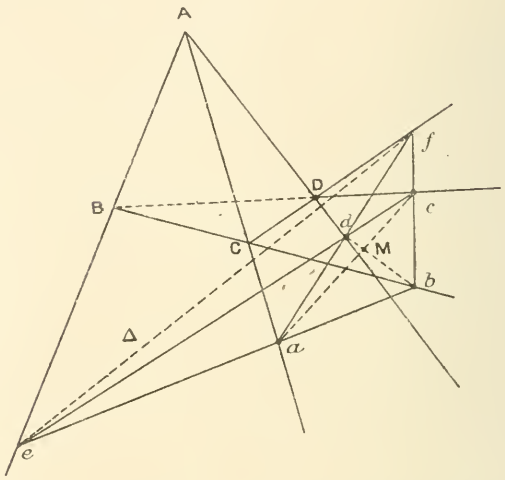
16. Démontrer, par la considération de rapports anharmoniques, le théorème de l'Exercice proposé n° 22 du Chapitre VII.

(*Cf.* Exercice résolu n° 2.)

17. Soit un tétraèdre ABCD. On coupe ses six arêtes par un plan (Π) quelconque. On obtient les six points a, b, c, d, e, f (*fig.* 12). On prend a', b', c', d', e', f' conjugués de a, b, c, d, e, f par rapport à AC, BC, BD, AD, AB, CD. Démontrer que les six plans BDa', ADb', ACc', BCd', CDe', ABf' ont un point commun P.

[Les plans ABf', ACc', ADb', par exemple, ont en commun la droite qui joint A au pôle trilinéaire de fcb par rapport au triangle BCD.

Fig. 12.



(Exercice résolu n° 2.) Le point P est le *pôle tétraédrique* du plan (H), qui est le *plan polaire tétraédrique* de P.]

17 *bis*. Soit un tétraèdre ABCD et une droite Δ, qui perce les faces BCD, CDA, DAB, ABC en a, b, c, d. Démontrer que le rapport anharmonique $(abcd)$ égale le rapport anharmonique du faisceau de plans Δ(ABCD).

[Projeter a, b, c, d sur le plan ABC, à partir de D. On est ramené à l'Exercice 5 *bis*.]

18. Soient (M_1, M'_1), (M_2, M'_2) deux couples de points homologues de deux divisions homographiques. On définit un point quelconque M de la première division par le rapport $\lambda = \dfrac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}}$ et le point homologue M′ par le rapport $\lambda' = \dfrac{\overline{M'M'_1}}{\overline{M'M'_2}}$. De quelle forme est la relation entre λ et λ' ?

Même question en posant $\lambda' = \dfrac{\overline{M'M'_2}}{\overline{M'M'_1}}$.

19. Entre les points de deux droites données (distinctes ou confon-

dues), on établit deux correspondances homographiques. Existe-t-il des couples de points homologues communs aux deux correspondances ? (Se ramène aux points doubles de deux divisions homographiques de même base. *Cf.* Exercice résolu n° 1.)

Même question pour deux involutions de même base. (*Cf.* Exercice proposé n° 8.)

20. Étant données deux divisions homographiques par trois couples de points homologues, comment peut-on construire, en se servant du théorème III du n° 148, le point homologue d'un point donné et, en particulier, les homologues des points à l'infini ?

(Si M_1, M_2, M_3, sont les points donnés sur D et M'_1, M'_2, M'_3 les points homologues donnés sur D', on déplace D' de manière que M'_1 vienne en M_1, sans que D' s'applique sur D. On peut aussi introduire une division intermédiaire D'', comprenant M_1, M'_2 et un point quelconque destiné à être l'homologue de M_3 et de M'_3).

21. Étant données deux divisions homographiques non semblables, de même base, on appelle I et J' les homologues des points à l'infini de la deuxième et de la première divisions. On sait que les points doubles E, F ont même milieu O que le segment IJ'. Si O' désigne l'homologue de O, considéré comme appartenant à la première division, montrer que O'J' divise harmoniquement EF. En déduire une construction des points doubles.

22. Justifier la construction suivante des points doubles précédents : A et A' désignant deux points homologues quelconques, on fait tourner le vecteur $\overrightarrow{IA}$ de $\frac{\pi}{2}$ autour du point I et le vecteur $\overrightarrow{J'A'}$ de $-\frac{\pi}{2}$ autour du point J'. Soient P la nouvelle position de A et P' la nouvelle position de A'. Le cercle de diamètre PP' coupe la base des divisions aux points doubles cherchés. Cas où I et J' sont confondus.

(On démontrera la similitude des triangles PIE, EJ'P'.)

23. Étant données deux divisions en involution, on prend un point fixe P en dehors de la base. Démontrer que le cercle mené par P et par deux points homologues quelconques passe par un deuxième point fixe P'. En déduire la construction du point homologue d'un point donné et la construction des points doubles.

[Le point P' se trouve sur la droite joignant P au point central (n° 141).]

24. A chaque droite Oλ issue de O, on fait correspondre sa sym-

trique $O\lambda'$ par rapport à une droite fixe $O.x$. Démontrer que $O\lambda$ et $O\lambda'$ engendrent deux faisceaux en involution. Rayons doubles.

25. Si les rayons doubles de deux faisceaux en involution sont rectangulaires, les rayons homologues ont des bissectrices fixes.

26. Étant donné un quadrilatère complet ABCDEF (n° 134), on joint un point O quelconque de son plan aux trois couples de sommets opposés. Les trois couples de rayons (OA, OC), (OB, OD), (OE, OF) ainsi obtenus appartiennent à une même involution. (*Cf.* Exercice résolu n° 3.)

27. Démontrer que les trois cercles décrits sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet comme diamètres ont deux points communs.

[Appliquer le théorème précédent, en prenant O en l'un quelconque des points de rencontre des deux cercles de diamètres respectifs AC et BD. Un corollaire évident consiste en ce que les milieux des diagonales sont en ligne droite.]

28. Soient un triangle ABC et une transversale Δ, qui coupe BC en a, CA en b, AB en c. On prend, sur Δ, trois autres points a', b', c'. La condition nécessaire et suffisante pour que les trois droites Aa', Bb' Cc' soient concourantes est que les trois couples de points (a, a'), (b, b'), (c, c') appartiennent à une même involution. [*Cf.* Exercice résolu n° 3. Se ramène à $A(aCBP) = P(ABCa)$].

29. Que donne le théorème précédent quand on prend Δ à l'infini, les points doubles de l'involution étant les points cycliques (n° 163) ou bien les points à l'infini de deux directions rectangulaires?

30. Chercher les points doubles de l'homographie définie par la relation $\frac{1}{\overline{OM}} - \frac{1}{\overline{OM'}} = k$. Réciproque.

31. Chercher les rayons doubles des faisceaux homographiques définis par la relation $\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\theta' = k$, où θ et θ' désignent les angles polaires de deux rayons homologues. Réciproque.

32. Démontrer que les droites définies par l'équation

$$(A + \lambda A')x^2 + 2(B + \lambda B')xy + (C + \lambda C')y^2 = 0$$

décrivent deux faisceaux en involution, quand λ varie. Former l'équation

quadratique des rayons doubles. Mêmes questions pour des divisions ou des faisceaux de plans.

33. Étant donnés deux faisceaux homographiques de sommets et de plans différents, chercher les rayons qui rencontrent leurs homologues. (Couper les faisceaux par l'intersection de leurs plans.)

34. Etant donnés deux faisceaux homographiques de même sommet et de plans différents, quelle est l'enveloppe du plan de deux rayons homologues? (Couper par un plan fixe.)

35. Étant donnés deux faisceaux homographiques de sommets et de plans différents, quel est le lieu des droites qui passent par un point donné et s'appuient sur deux rayons homologues?

36. Quel est le lieu du point commun à trois plans homologues de trois faisceaux homographiques deux à deux?

[Cubique gauche commune à trois quadriques, obtenues en associant les faisceaux deux à deux.]

37. Un tétraèdre se déforme de telle manière que deux arêtes opposées aient chacune un milieu et une direction fixes. Le volume reste, en outre, constant. Lieux des arêtes non fixes. (S'appuyer sur l'Exercice proposé n° 17 du Chapitre VIII.)

38. Trouver le lieu d'un segment de droite qui s'appuie, par ses extrémités, sur deux droites données et qui est vu d'un point donné sous un angle droit. Cas où les droites et le point donnés sont dans un même plan.

39. Soient, dans l'espace, quatre droites A, B, C, D. On suppose que les plus courtes distances de A à B, C, D sont égales. Trouver le lieu de D, sachant que A, B, C sont fixes et que D doit s'appuyer sur B et C.

(Deux plans et une quadrique.)

40. Étant données deux droites fixes D et D′, dans un même plan, on projette un point quelconque M de ce plan en P, sur D et en P′, sur D′. Trouver l'enveloppe de PP′ quand M décrit une droite fixe et le lieu de M quand PP′ passe par un point fixe.

41. Étant donnés deux droites et un point fixes, dans un même plan, trouver l'enveloppe des droites sur lesquelles les droites données découpent un segment vu du point donné sous un angle constant.

42. Un polygone plan de n côtés varie de manière que ses sommets décrivent chacun une droite fixe et que $n-1$ de ses côtés passent chacun par un point fixe. Enveloppe du $n^{ième}$ côté. Cas de dégénérescence. Cas de $n=3$.

43. On reprend le polygone précédent et l'on suppose que ses côtés passent chacun par un point fixe et que $n-1$ de ses sommets décrivent chacun une droite fixe. Lieu du $n^{ième}$ sommet. Cas de dégénérescence. Cas de $n=3$.

[On peut déduire de l'un ou l'autre de ces deux exercices, la propriété suivante :

Si deux triangles ABC, A'B'C' sont tels que les droites AA', BB', CC' soient concourantes, les côtés BC, B'C'; CA, C'A'; AB, A'B' se coupent en trois points en ligne droite et réciproquement. Les deux triangles sont dits *homologiques* (n° 406)].

44. Trouver l'enveloppe des droites d'un plan sur lesquelles quatre droites données découpent une division harmonique.

45. Soit un quadrilatère complet ABCDEF. On mène les bissectrices des angles A, B, C, D. On obtient le quadrilatère A'B'C'D'. Soit I le point de rencontre des diagonales A'C' et B'D'. On suppose que le quadrilatère proposé se déforme de manière que les points E, F, I restent fixes et que le sommet A décrive une droite Δ. On demande les lieux des sommets B, C, D. Discuter la nature de ces lieux, suivant la position de Δ.

(Extrait de la composition de Mathématiques élémentaires donnée au concours d'Agrégation en 1900.)

[Remarquer que les diagonales A'C' et B'D' sont bissectrices de $\widehat{BFA}$ et $\widehat{DEA}$. On a ensuite des faisceaux homographiques. A propos du lieu de C, on pourra remarquer que la correspondance entre A et C est une transformation par points inverses (n° 416).]

46. Étant donnés deux point fixes A et B, trouver le lieu des points M qui sont tels que les bissectrices de $\widehat{AMB}$ aient des directions fixes. (Hyperbole équilatère.)

47. Reprendre géométriquement les questions 1° et 2° de l'Exercice proposé n° 12 du Chapitre V. Démontrer en outre que NN' passe par un point fixe.

[Pour le lieu du milieu I de NN', considérer les faisceaux décrits

par NN′ et par la perpendiculaire à Δ menée par I. On montrera que, si Q est le point de rencontre de NN′ avec Δ et H la projection de O sur Δ, OM et OM′ sont les bissectrices de $\widehat{HOQ}$.

Pour 2°, on observera que les bissectrices de $\widehat{MOM'}$ font un angle constant $\pm\frac{\pi}{4}$ avec OM et OM′.]

48. Reprendre géométriquement la question proposée n° 15 du Chapitre VI. (La droite PQ découpe des divisions homographiques sur la droite lieu de P et sur la droite de l'infini. On pourra généraliser en supposant que P décrit une droite quelconque du plan.)

49. Reprendre la question proposée n° 18 du Chapitre VI.

50. Reprendre la question proposée n° 19 du même Chapitre.
(P est conjugué harmonique de O par rapport à BB′.
Dans 2°, le milieu I de AB′ décrit la droite OI; B et I décrivent des divisions homographiques. De même pour B′ et le point à l'infini de la hauteur issue de B′.
Dans 3°, B et le point à l'infini de la hauteur décrivent aussi des divisions homographiques. Pour déterminer B, connaissant ce point à l'infini, on s'appuiera sur 2°.)

51. Trouver le lieu de l'orthocentre d'un triangle, sachant que deux sommets sont fixes et que le troisième décrit une droite.

52. Étant donné un quadrilatère plan ABCD, trouver le lieu des points M tels que $M(ABCD) = k = \text{const.}$

53. Soit un triangle isoscèle OAB(OA = OB). Par le point O, on mène une droite Oz perpendiculaire au plan OAB. Par A, on mène une droite fixe quelconque D. Par Oz, on fait passer un plan variable (P). On prend le symétrique M de B par rapport à (P). Trouver le lieu de la droite d'intersection de (P) avec le plan (M, D).

54. Lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les faces passent chacune par une droite fixe. (*Cf.* Exercice n° 36).

CHAPITRE X.

COORDONNÉES TRILINÉAIRES ET TÉTRAÈDRIQUES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Pôles et polaires trilinéaires. Pôles et plans polaires tétraédriques.* — Reprenons les notations de l'Exercice résolu n° 2 du Chapitre IX. Prenons le triangle ABC pour triangle de référence. Soient (x_0, y_0, z_0) les coordonnées du point M. L'équation de la droite AM est

$$\frac{y}{y_0} - \frac{z}{z_0} = 0. \tag{1}$$

Celle de Aa, qui est conjuguée harmonique de AM par rapport à AC$(y = 0)$ et AB$(z = 0)$ est (n° **134**)

$$\frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 0. \tag{2}$$

Le point a est donc défini par le système

$$\frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 0, \qquad x = 0.$$

Il satisfait à l'équation.

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 0. \tag{3}$$

Comme celle-ci ne change pas quand on permute circulairement les coordonnées, elle est aussi vérifiée par les points b et c. D'où il résulte que les trois points sont sur une même droite D, dont (3) est l'équation.

Réciproquement, si nous partons d'une droite D quelconque

$$ux + vy + wz = 0, \tag{4}$$

cette équation est identique à (3) si l'on prend

$$x_0 = \frac{1}{u}, \qquad y_0 = \frac{1}{v}, \qquad z_0 = \frac{1}{w}. \tag{5}$$

Ces formules donnent donc les coordonnées du pôle trilinéaire de D.

Cherchons *le lieu de* M *quand* D *passe par un point fixe* P (x_1, y_1, z_1). Il suffit d'écrire que l'équation (3) est vérifiée pour $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ et de considérer ensuite x_0, y_0, z_0 comme les coordonnées courantes. En supprimant les indices o, on obtient l'équation du lieu :

$$\frac{x_1}{x} + \frac{y_1}{y} + \frac{z_1}{z} = 0 \tag{6}$$

ou

$$x_1 yz + y_1 zx + z_1 xy = 0. \tag{7}$$

Le lieu est une conique circonscrite au triangle de référence (n° 503). La tangente en A s'obtient en annulant le coefficient de x (n° 200) :

$$y_1 z + z_1 y = 0$$

ou

$$\frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 0.$$

On retrouve, aux notations près, l'équation (2). Donc, la tangente en A passe par le point de rencontre de BC avec la polaire trilinéaire de P.

Soit maintenant un tétraèdre ABCD, que nous prenons pour tétraèdre de référence. Coupons-le par le plan (H)

$$ux + vy + wz + rt = 0. \tag{8}$$

Si nous gardons les notations de l'exercice proposé n° 17 du Chapitre IX, le plan BDa a pour équation

$$ux + wz = 0, \tag{9}$$

car, il passe bien par BD (n° 158) et par le point a, qui est obtenu en faisant $y = t = 0$ dans (8), ce qui donne précisément (9). Le plan BDa', conjugué de BDa par rapport à $x = 0$ et $z = 0$ a pour équation

$$ux - wz = 0. \tag{10}$$

On a des équations analogues pour les cinq autres plans ADb', ... Elles sont toutes vérifiées pour

$$ux = vy = wz = ht,$$

c'est-à-dire pour le point de coordonnées $\left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}, \frac{1}{w}, \frac{1}{h}\right)$, qui est le point de concours des six plans BDa', ... et que nous avons appelé *le pôle tétraédrique de* (H).

On verrait de même que le plan polaire tétraédrique du point M (x_0, y_0, z_0, t_0) a pour équation

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} + \frac{t}{t_0} = 0. \tag{11}$$

Remarque. — Connaissant l'équation de la droite ou du plan de l'infini, on en déduit les coordonnées du centre de gravité du triangle ou du tétraèdre de référence, qui est le pôle de cette droite ou de ce plan. Par exemple, *les coordonnées trilinéaires normales du centre de gravité sont* $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ (n° 155).

2. *Trouver l'équation du cercle circonscrit au triangle de référence en coordonnées normales.*

On peut arriver à cette équation par des considérations de Géométrie élémentaire. Nous préférons indiquer une autre méthode, qui nous paraît plus instructive.

L'équation cherchée est de la forme (n° 503)

$$\alpha yz + \beta zx + \gamma xy = 0. \tag{1}$$

Pour déterminer α, β, γ, nous allons écrire que les points à l'infini sur les deux bissectrices de l'angle A sont conjugués par rapport au cercle (n° 164).

Ces deux bissectrices ont pour équations

$$y \pm z = 0.$$

En combinant avec l'équation de la droite de l'infini

$$ax + by + cz = 0, \tag{2}$$

on a les coordonnées des deux points envisagés; on peut prendre, par exemple,

$$(b + c, -a, -a) \quad \text{et} \quad (c - b, a, -a).$$

Annulons la forme polaire de (1) par rapport à ces deux groupes de coordonnées (n° 132) :

$$-a\beta(c - b + b + c) + \gamma a(b + c + b - c) = 0$$

ou

$$\frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}.$$

On aurait des conditions analogues, en considérant les points à l'infini sur les bissectrices des angles B et C. Elles sont toutes satisfaites, en prenant

$$\alpha = a, \qquad \beta = b, \qquad \gamma = c.$$

L'équation du cercle circonscrit est donc

$$ayz + bzx + cxy = 0. \tag{3}$$

Remarques. — I. L'équation d'un cercle quelconque est

$$ayz + bzx + cxy - (ax + by + cz)(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0, \tag{4}$$

car cette équation représente la conique la plus générale qui passe par les points cycliques (n°307). Si l'on prend une autre équation analogue, l'équation

$$(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y + (\gamma - \gamma')z = 0$$

représente l'axe radical des deux cercles.

II. Les droites isotropes issues de A ont pour équation

$$(cy + bz)(by + cz) - a^2yz = 0.$$

III. La condition pour que deux droites D et D′

$$ux + vy + wz = 0, \qquad u'x + v'y + w'z = 0$$

soient rectangulaires s'obtient aisément en écrivant que leurs points à l'infini $(bw - cv, cu - aw, av - bu)$ et $(bw' - cv', cu' - aw', av' - bu')$ sont conjugués par rapport au cercle (3). On obtient de la sorte

$$S(uv' + vu')\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - (uu' + vv' - ww') = 0$$

ou, en se servant de la formule

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

$$S(uv' + vu')\cos C - (uu' + vv' + ww') = 0. \tag{6}$$

Par exemple, si l'on prend pour D′ le côté BC, on a $v' = w' = 0$; la condition (6) se réduit à

$$u = v\cos C + w\cos B. \tag{7}$$

La hauteur issue de A s'obtient en supposant $u = 0$, ce qui donne $v = \cos B$, $w = -\cos C$; d'où l'équation

$$y\cos B = z\cos C. \tag{8}$$

EXERCICES PROPOSÉS.

1. On coupe le triangle ABC par les deux transversales abc, $a'b'c$ (a et a' sur BC, b et b' sur CA, c et c' sur AB). Démontrer que l'on a

$$(\mathrm{BC}\,aa')(\mathrm{CA}\,bb')(\mathrm{AB}\,cc') = 1,$$

et réciproquement.

En déduire le théorème de Ménélaüs (Chap. VI, Exercice proposé n° 9). (Prendre $a'b'c'$ à l'infini.)

2. Soient un triangle ABC et deux points M et M'. Les droites AM et AM' rencontrent BC en a et a'; de même, BM et BM' rencontrent CA en b et b'; CM et CM' rencontrent AB en c et c'. Démontrer que l'on a encore l'égalité précédente. Réciproque.

3. Soient le triangle ABC, la transversale $a'b'c'$ du n° 1 et le point M du n° 2. Démontrer que l'on a

$$(\mathrm{BC}\,aa')(\mathrm{CA}\,bb')(\mathrm{AB}\,cc') = -1.$$

Réciproque.

En déduire le théorème de Céva (Chap. VI, Exercice résolu n° 4).

4. Soient le triangle ABC et un point K dans son plan. On prend les conjuguées harmoniques de BK par rapport à $\widehat{\mathrm{CBA}}$ et de CK par rapport à $\widehat{\mathrm{ACB}}$. Démontrer qu'elles se coupent sur AK. (Prendre le point K pour point unitaire.)

5. Soient les deux droites

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = 0, \qquad \mathrm{A}'x + \mathrm{B}'y + \mathrm{C}'z = 0.$$

Elles se coupent en un certain point O. La conjuguée harmonique de OA par rapport à ces deux droites rencontre BC en a. On a, de même, deux points analogues b sur CA et c sur AB. Prouver que les

points a, b, c sont en ligne droite et trouver l'équation de cette droite :

$$\left(\frac{x}{BC' + CB'} + \frac{y}{CA' + AC'} + \frac{z}{AB' + BA'} = 0\right).$$

(*Cf.* Chap. IX, Exercice résolu n° 3.)

6. Corrélatif du précédent.

7. Calculer les coordonnées trilinéaires normales du centre de gravité, du centre du cercle circonscrit et de l'orthocentre. Vérifier que ces trois points sont en ligne droite et calculer le rapport des vecteurs qu'ils déterminent. [*Cf.* Chap. XI, Exercice proposé n° 1. — On pourra considérer le centre du cercle circonscrit comme le pôle de la droite de l'infini par rapport à ce cercle (n° 461).]

8. Étendre l'Exercice proposé n° 1 à un quadrilatère gauche. (*Cf.* Chap. VII, Exercices proposés n^{os} 22 et 23.)

9. Soient un quadrilatère gauche et un point M de l'espace. Montrer que les quatre plans déterminés par M et par chacun des côtés du quadrilatère coupent les côtés opposés en quatre points situés dans un même plan.

10. Calculer l'équation du cercle des neuf points en coordonnées normales. Vérifier analytiquement qu'il passe par les neuf points connus.

[Avec les notations de l'équation (4) de l'Exercice résolu n° 2, on a

$$\alpha = -\frac{\cos A}{2}, \qquad \beta = -\frac{\cos B}{2}, \qquad \gamma = -\frac{\cos C}{2}\Big].$$

11. Calculer les équations des cercles inscrit et exinscrits. (On exprimera que le centre a pour polaire la droite de l'infini, puis que le cercle est tangent à un côté du triangle de référence. On peut aussi chercher l'équation tangentielle.)

CHAPITRE XI.

LE CERCLE.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Cercle des neuf points : Soient le triangle* ABC. *Menons les hauteurs* AA′, BB′, CC′. *Soient, d'autre part,* A″, B″, C″ *les milieux des côtés,* A‴, B‴, C‴ *les milieux des segments* AH, BH, CH. *Démontrer que les neuf points* A′, B′, C′, A″, B″, C″, A‴, B‴, C‴ *sont sur un même cercle.*

Prenons le côté BC pour axe des x, la hauteur AA′ pour axe des y Soient $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$.

Le cercle en question, devant passer à l'origine, a une équation de la forme

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0. \tag{1}$$

Écrivons qu'il passe par B″. Les coordonnées de ce point étant $\left(\frac{c}{2}, \frac{a}{2}\right)$ (n° 23), on a

$$\frac{a^2 + c^2}{4} - \alpha c - \beta a = 0.$$

De même, en écrivant qu'il passe par C″, nous avons

$$\frac{a^2 + b^2}{4} - \alpha b - \beta a = 0.$$

De ces deux équations linéaires en α, β, on tire

$$\alpha = \frac{b + c}{4}, \qquad \beta = \frac{a^2 - bc}{4a}. \tag{2}$$

Notre cercle est maintenant déterminé. Vérifions alors qu'il passe

par $A''\left(\frac{b+c}{2}, 0\right)$:

$$\frac{(b+c)^2}{4} - \alpha(b+c) = 0.$$

C'est la première équation (2).

Nous savons maintenant que le cercle $A''B''C''$ passe par O ou A'. Comme les trois sommets du triangle ABC jouent le même rôle par rapport à ce cercle, s'il passe par A', il passe aussi par B' et C', par raison de symétrie. De même, il passera certainement par B''' et C''', si nous prouvons qu'il passe par A'''.

Or, l'équation de AC est

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{a} - 1 = 0.$$

La perpendiculaire BH menée par B est donc représentée par

$$(x-b)c = ay.$$

Faisant $x = 0$, nous avons l'ordonnée du point H :

$$y_1 = -\frac{bc}{a}. \tag{3}$$

Celle du point A''' est ensuite $\frac{a+y_1}{2} = \frac{a^2-bc}{2a} = \beta$. Mais, c'est précisément ce qu'on obtient en faisant $x = 0$ dans (1) et supprimant la solution $y = 0$. Le cercle $A''B''C''$ passe donc bien par A''' et le théorème est démontré.

2. *On donne deux cercles* (C) *et* (C'). *Soit* M *un point quelconque du premier. Trouver les lieux des centres et des points d'intersection des cercles qui sont orthogonaux à* (C') *et qui sont, de plus, l'un tangent, l'autre orthogonal en* M *à* (C).

Prenons la ligne des centres OO' pour axe des x et le diamètre perpendiculaire de (C) pour axe des y (*fig.* 13). Soit R le rayon de (C) et soit

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + \gamma = 0 \tag{1}$$

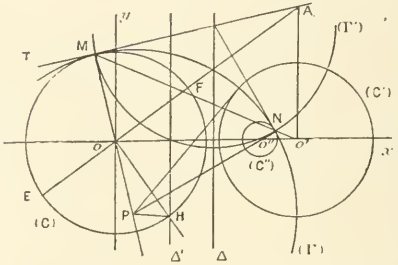
l'équation de (C').

Appelons φ l'angle polaire du point M; ses coordonnées sont

$$x = R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi. \tag{2}$$

Tout cercle (Γ) tangent en M à (C) fait partie du faisceau déterminé

Fig. 13.



par (C) et la tangente MT. Or, les équations respectives de (C) et de MT sont

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0, \tag{3}$$

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - R = 0. \tag{4}$$

L'équation de (Γ) est donc de la forme (n° 171)

$$x^2 + y^2 - R^2 - 2\lambda(x\cos\varphi + y\sin\varphi - R) = 0. \tag{5}$$

Écrivons que ce cercle est orthogonal à (C'); nous avons (n° 170)

$$2\alpha\lambda\cos\varphi = \gamma + 2\lambda R - R^2. \tag{6}$$

D'où

$$2\lambda = \frac{\gamma - R^2}{\alpha\cos\varphi - R}.$$

Portons dans (5); nous obtenons l'équation du premier des cercles de l'énoncé

$$(\alpha\cos\varphi - R)(x^2 + y^2 - R^2) + (R^2 - \gamma)(x\cos\varphi + y\sin\varphi - R) = 0. \tag{7}$$

Les coordonnées de son centre satisfont aux deux équations

$$\begin{cases} 2x(\alpha\cos\varphi - R) + (R^2 - \gamma)\cos\varphi = 0, \\ 2y(\alpha\cos\varphi - R) + (R^2 - \gamma)\sin\varphi = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Nous aurons le lieu de ce centre, en éliminant φ entre ces deux équa-

tions. On en tire

$$\cos\varphi = \frac{2Rx}{2\alpha x + R^2 - \gamma}, \qquad \sin\varphi = \frac{2Ry}{2\alpha x + R^2 - \gamma}.$$

Élevons au carré, ajoutons et chassons les dénominateurs :

$$4R^2(x^2+y^2) = (2\alpha x + R^2 - \gamma)^2. \tag{9}$$

Telle est *l'équation du lieu du centre de* (Γ). Elle représente (n° 518) une *conique de foyer* O. La directrice correspondante a pour équation

$$2\alpha x + R^2 - \gamma = 0. \tag{10}$$

C'est l'axe radical du cercle (C′) et du cercle imaginaire

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0. \tag{11}$$

Quant à l'excentricité, elle est égale à $\frac{\alpha}{R}$. Le lieu est donc *une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que* O′ *est intérieur à* (C), *extérieur à* (C) *ou sur* (C).

Le cercle (Γ′) étant orthogonal à (C) et à (C′), on sait que son centre se trouve sur l'axe radical Δ de ces deux cercles. Quant à l'intersection de (Γ) et de (Γ′), elle se compose du point M, qui décrit (C) et du point N, dont nous voulons le lieu. On pourrait, à cet effet, calculer l'équation de (Γ′) et la combiner avec celle de (Γ). Mais, il est plus simple d'observer que l'axe radical de (Γ) et de (Γ′), qui passe déjà par M, passe aussi par O′, centre d'un cercle, (C′), orthogonal à (Γ) et à (Γ′). Nous aurons donc le point N en prenant l'intersection de (Γ) avec la droite O′M. Or, les équations paramétriques de cette droite sont

$$x = R\cos\varphi + \rho(R\cos\varphi - \alpha), \qquad y = R\sin\varphi + \rho R\sin\varphi \tag{12}$$

ou

$$x = R(1+\rho)\cos\varphi - \alpha\rho, \qquad y = R(1+\rho)\sin\varphi. \tag{13}$$

Portons dans (7) :

$$(\alpha\cos\varphi - R)[R^2(1+\rho)^2 - 2\alpha\rho R(1+\rho)\cos\varphi + \alpha^2\rho^2 - R^2] + (R^2-\gamma)[R(1+\rho) - \alpha\rho\cos\varphi - R] = 0$$

ou

$$(\alpha\cos\varphi - R)[\rho^2(R^2+\alpha^2 - 2\alpha R\cos\varphi) + 2\rho R(R - \alpha\cos\varphi)] + (R^2-\gamma)\rho(R - \alpha\cos\varphi) = 0.$$

On a d'abord la racine $\rho = 0$, qui correspond au point M. Divisons donc par ρ et, en même temps, par $\alpha\cos\varphi - R$; il vient

$$(14) \qquad \rho(R^2 + \alpha^2 - 2\alpha R\cos\varphi) + 2R^2 - 2R\alpha\cos\varphi - R^2 + \gamma = 0$$

ou

$$(15) \qquad \rho = \frac{2R\alpha\cos\varphi - R^2 - \gamma}{R^2 + \alpha^2 - 2\alpha R\cos\varphi}.$$

En portant dans (12), on aurait les équations paramétriques du lieu. Mais, il est aussi très facile d'éliminer ρ et φ entre (13) et (14).

Éliminons $R(1+\rho)\cos\varphi$ entre (14) et la première (13) :

$$\rho(R^2 + \alpha^2) + R^2 + \gamma - 2\alpha(x + \alpha\rho) = 0;$$

d'où

$$(16) \qquad \rho = \frac{2\alpha x - R^2 - \gamma}{R^2 - \alpha^2}.$$

D'autre part, éliminons φ entre les deux équations (13) :

$$(17) \qquad (x + \alpha\rho)^2 + y^2 = R^2(1+\rho)^2.$$

Portant (16) dans (17), *nous avons l'équation du lieu*

$$\frac{[x(R^2 + \alpha^2) - \alpha(R^2 + \gamma)]^2}{(R^2 - \alpha^2)^2} + y^2 = \frac{R^2(2\alpha x - \alpha^2 - \gamma)^2}{(R^2 - \alpha^2)^2}$$

ou

$$x^2(R^2 + \alpha^2)^2 - 2(R^2 + \gamma)(R^2 + \alpha^2)\alpha x + (R^2 + \gamma)^2\alpha^2 + (R^2 - \alpha^2)^2 y^2 - 4R^2\alpha^2 x^2 + 4R^2\alpha x(\alpha^2 + \gamma) - R^2(\alpha^2 + \gamma)^2 = 0$$

ou

$$(x^2 + y^2)(R^2 - \alpha^2)^2 - 2x\alpha(R^2 - \gamma)(R^2 - \alpha^2) + (\gamma^2 - R^2\alpha^2)(\alpha^2 - R^2) = 0$$

ou, en divisant par $R^2 - \alpha^2$,

$$(18) \qquad (x^2 + y^2)(R^2 - \alpha^2) - 2x\alpha(R^2 - \gamma) + R^2\alpha^2 - \gamma^2 = 0:$$

Cette équation représente un cercle (C″), dont le centre est sur $O'x$. Son axe radical avec (C) a pour équation

$$R^2(R^2 - \alpha^2) - 2\alpha x(R^2 - \gamma) + R^2\alpha^2 - \gamma^2 = 0$$

ou, en divisant par $R^2 - \gamma$,

$$R^2 + \gamma - 2\alpha x = 0.$$

On obtient l'équation de l'axe radical de (C) et de (C'). Donc, *le cercle* (C'') *fait partie du faisceau qui admet* (C) *et* (C') *pour cercles de base*. Le lecteur vérifiera sans peine qu'il a pour rayon $\frac{RR'^2}{\alpha^2 - R^2}$, en appelant R' le rayon de (C').

Si $\alpha = R$, c'est-à-dire si O' se trouve sur (C), il se réduit à l'axe radical précédent. Si $R^2 = \gamma$, c'est-à-dire si (C) est orthogonal à (C'), il se réduit au cercle (C). Dans ce dernier cas, (Γ) se confond avec (C); cela explique pourquoi N décrit (C).

Solution géométrique. — Le cercle (C') étant orthogonal à (Γ), la puissance de O' par rapport à (Γ) est R'^2. On a donc

$$\overline{O'N}.\overline{O'M} = R'^2.$$

Le lieu du point N est donc le cercle (C'') inverse du cercle (C) par rapport au cercle (C'). De plus, comme (C) est tangent en M à (Γ), (C'') est tangent en N à (Γ).

Il est aisé maintenant d'avoir le lieu du centre P de (Γ). Dans le cas de la figure 13, on a

$$PO'' - PO = OM - O''N = R - R''.$$

Le lieu du point P est donc une hyperbole.

On pourrait examiner de même tous les cas de figure possibles et retrouver les résultats obtenus analytiquement.

On peut aussi reconnaître le genre de la conique (S) lieu de P, en observant que le point P va à l'infini lorsque (Γ) se réduit à une droite. Cette droite se confond nécessairement avec MNO'. Elle est, de plus, tangente à (C). C'est donc une des tangentes à (C) qui passent par O'. Par suite, les directions asymptotiques de (S) sont perpendiculaires aux tangentes menées par O' à (C). Le lieu de P est donc une hyperbole, une ellipse ou une parabole, suivant que O' est extérieur à (C), intérieur à (C) ou sur (C).

Voici maintenant une autre solution, qui va nous donner la génération du lieu par le foyer O et la directrice correspondante, comme il a été trouvé analytiquement.

Par le point O', menons la perpendiculaire à OO', jusqu'à sa rencontre en A avec MT. Menons le diamètre AOEF. Considérons le cercle (Γ''), qui passe par E et F et qui est orthogonal à (C'). Soit H son centre. Le point O', centre du cercle (C') orthogonal à (Γ) et (Γ''), se trouve sur l'axe radical de ces deux cercles. Le point A se trouve aussi sur cet axe

radical, car sa puissance est $\overline{AM}^2$ par rapport à (Γ) et $\overline{AE}.\overline{AF}$ par rapport à (Γ''), quantités qui sont toutes deux égales à la puissance de A par rapport à (C). Il suit de là que O'A est l'axe radical de (Γ) et (Γ''). Comme cet axe radical doit être perpendiculaire à la ligne des centres, on peut affirmer que PH est parallèle à OO'.

En second lieu, le cercle (Γ'') est orthogonal au cercle imaginaire (C'''), de centre O et de rayon iR, car la puissance de O par rapport à (Γ'') est $\overline{OE}.\overline{OF} = -R^2 = (iR)^2$. Comme (Γ'') est, en outre, orthogonal à (C'), le lieu du point H est l'axe radical Δ' de (C''') et (C').

Je dis maintenant que les triangles OPH et O'OM sont semblables. En effet, les angles $\widehat{MOO'}$ et $\widehat{OPH}$ sont égaux, comme correspondants. Remarquons ensuite que OH est perpendiculaire à EF et que OP est perpendiculaire à MA. Les angles $\widehat{HOP}$ et $\widehat{OAM}$ sont donc égaux. Or, le quadrilatère OMAO' est inscriptible; on a donc $\widehat{OAM} = \widehat{OO'M}$. D'où $\widehat{HOP} = \widehat{OO'M}$. Les deux triangles ci dessus mentionnés ont deux angles égaux; ils sont donc bien semblables. Il en résulte la proportion

$$\frac{PO}{PH} = \frac{OO'}{OM} = \frac{\alpha}{R}.$$

Le lieu du point P est donc une conique de foyer O, de directrice correspondante Δ' et d'excentricité $\frac{\alpha}{R}$.

3. *Sur* Ox, *on donne un point fixe* A, *d'abscisse* a *et, sur* Oy, *un point* B, *d'ordonnée* b. *On considère deux cercles variables, tangents entre eux et orthogonaux le premier en* A *à* Ox, *le second en* B *à* Oy. *On demande* :

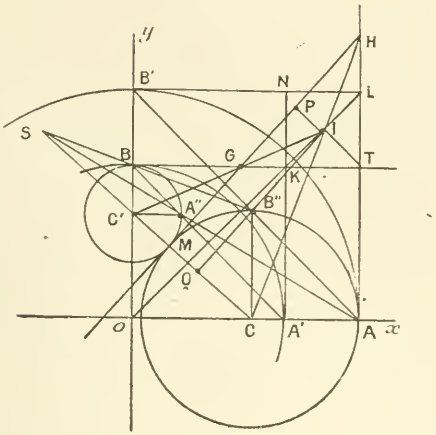
1° *L'enveloppe de la ligne des centres.*
2° *L'enveloppe de l'axe radical.*
3° *Le lieu du point de contact.*
4° *Le lieu du centre de similitude autre que le point de contact.*

Soient α l'abscisse du centre C du premier cercle et β l'ordonnée du centre C' du second cercle (*fig.* 14). Convenons d'orienter (C) au moyen de la demi-tangente positive AT, de même sens que Oy. Le rayon algébrique du cycle obtenu (n° 168) est, comme on s'en rend compte aisément,

$$(1) \qquad R = \overline{CA} = a - \alpha.$$

Nous pouvons maintenant orienter (C′) en prenant la demi-tangente positive en B dans le sens de Ox ou dans le sens opposé, ce qui revient à

Fig. 14.



prendre $R' = -\overline{C'B}$ ou $+\overline{C'B}$. En écrivant que les deux cycles obtenus sont tangents (n° 168), nous serons conduits, suivant la détermination adoptée pour R′, à deux groupes de solutions pour les différentes questions posées dans l'énoncé. Mais, chacune des déterminations de R′ se déduisant de l'autre par le changement de sens de Oy, ce même changement nous permettra d'obtenir le second groupe de solutions quand nous aurons obtenu le premier. Nous pouvons, d'après celà, nous borner à prendre, par exemple,

$$R' = -\overline{C'B} = \beta - b, \tag{2}$$

la demi-tangente positive en B ayant donc le sens de Ox.

Cela posé, la condition de contact des deux cycles s'écrit (n° 168)

$$\overline{CC'}^2 = (R - R')^2$$

ou

$$\alpha^2 + \beta^2 = [(a + b) - (\alpha + \beta)]^2$$

ou, en posant $a + b = m$,

$$2\alpha\beta - 2m(\alpha + \beta) + m^2 = 0. \tag{3}$$

On voit que les points C et C′ décrivent, sur Ox et Oy, deux divisions homographiques.

1° D'après cela, l'enveloppe de CC′ est une conique (n° 147). On pourrait poursuivre la solution dans cette voie. Procédons plutôt analytiquement.

L'équation de CC′ est

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0. \tag{4}$$

Rien n'est plus aisé que de former l'équation tangentielle de l'enveloppe (n° 293). Identifions (4) avec

$$ux + vy + w = 0. \tag{5}$$

Nous avons

$$\frac{1}{\alpha u} = \frac{1}{\beta v} = -\frac{1}{w}.$$

D'où

$$\alpha = -\frac{w}{u}, \qquad \beta = -\frac{w}{v}.$$

Portons dans (3) :

$$2w^2 + 2mw(u+v) + m^2uv = 0$$

ou, en décomposant en carrés en prenant w pour variable directrice (n° 468),

$$2\left[w + \frac{m}{2}(u+v)\right]^2 = \frac{m^2}{2}(u^2+v^2). \tag{6}$$

On reconnaît l'équation tangentielle d'un cercle (Γ) (n° 165), dont le centre I à pour coordonnées $\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right)$ et dont le rayon est $\frac{m}{2}$. Ce cercle est tangent à Ox et à Oy.

2°, 3° et 4°. Nous nous bornerons à donner quelques indications au lecteur, qui devra faire les calculs.

Pour 2°, il suivra une marche analogue à celle de 1° et aboutira à l'équation tangentielle d'un cercle de centre I et de rayon $\frac{a-b}{2}$.

Pour 3°, remarquer que la distance $\overline{MI}^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{(a-b)^2}{4}$, d'après 1° et 2°.

Pour 4°, appliquer les formules (39) du n° 169. On peut aussi prendre le rapport de ces deux formules et combiner avec l'équation (4). On obtient deux équations linéaires en $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, d'où l'on tire ces variables,

pour porter ensuite dans (3). On obtient, de la sorte, l'équation du lieu, qui est une hyperbole.

Solution géométrique. — La tangente au point de contact M des deux deux cercles rencontre BT en G et AT en H (*fig.* 14). Les droites CH et C'G sont bissectrices des triangles HGT et OCC'. Elles se coupent donc au point I de rencontre des bissectrices de $\widehat{GTH}$ et $\widehat{COC'}$. On en conclut que MGH et CC' enveloppent respectivement les cercles de centre I et tangents à AT, BT d'une part, à Ox, Oy d'autre part. Pour le lieu du centre de similitude S, on montrera que AS et BS décrivent deux faisceaux homographiques. A cet effet, on remarquera, au préalable, que les points A'' et B'', respectivement homologues de A et B dans l'homothétie, décrivent des droites BA' et AB' perpendiculaires à OI.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Calculer l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC de l'Exercice résolu n° 1. Vérifier que le centre de ce cercle, le centre du cercle des neuf points, le centre de gravité et l'orthocentre sont quatre points en ligne droite et évaluer les rapports des vecteurs qu'ils déterminent. (Géométriquement, il suffit de remarquer que l'orthocentre et le centre de gravité sont les centres d'homothétie du cercle circonscrit et du cercle des neuf points.)

2. Étant donnés un point fixe O et une droite fixe D, former l'équation générale et trouver le lieu des centres des cercles (C) qui passent par O et qui coupent D en deux points vus de O sous un angle constant. Montrer qu'il existe des cercles (Γ) tels que chacun d'eux coupe sous le même angle tous les cercles (C). Les cercles (Γ) forment un faisceau, dont on cherchera les points limites. Solution géométrique.

[On pourra prendre comme paramètre variable l'angle polaire du centre du cercle (C). Pour la solution géométrique, remarquer que le cercle d'isogonalité de deux cercles (C) quelconques passe par O et par le symétrique de O par rapport à D].

3. Soient deux axes rectangulaires Oxy et une droite Δ parallèle à Ox. Désignant par A un point quelconque du plan, la droite OA rencontre Δ en un certain point B. On considère le cercle (C) de centre A et de rayon AB.

1° Former l'équation générale des cercles (C).

2° Trouver et construire les lieux des centres des cercles (C) qui sont tangents à Ox ou à Oy.

3° Former l'équation générale des cercles (C) qui sont vus de O sous un angle constant V. Lieu de leurs centres.

4° Par un point P quelconque du plan passent deux cercles (C′) et (C″) satisfaisant à 3°. Où doit se trouver P pour que ces cercles soient réels? Lieu de P, sachant que les tangentes menées par O à (C′) sont perpendiculaires aux tangentes menées par O à (C″). Lieu de P, sachant que (C′) est orthogonal à (C″).

N. B. — On pourra prendre comme paramètres variables les coordonnées polaires de A.

4. Les axes étant rectangulaires, on donne deux points fixes, A et B, sur Ox, d'abscisses a et $-a$. On prend un point P quelconque dans le plan, de coordonnées x_0, y_0. Les droites PA et PB rencontrent Oy en A′ et B′.

1° Former l'équation du cercle (C) circonscrit au triangle PA′B′.

2° Démontrer que ce cercle est orthogonal au cercle circonscrit au triangle PAB.

3° Lieu du centre de (C), quand P décrit une parallèle à Ox ou à Oy. Montrer que, dans chacun de ces cas, le cercle (C) reste orthogonal à un cercle fixe, qu'on déterminera.

4° Mêmes questions, quand le point P décrit un cercle passant par A et B.

5. Lieu des points dont le rapport des puissances par rapport à deux cercles fixes est constant. Variation du lieu, quand le rapport varie. Montrer qu'on peut, sans changer le lieu, remplacer les deux cercles donnés par deux cercles quelconques du faisceau qu'ils déterminent. En déduire que les cercles du faisceau de points limites L et L′ sont les lieux des points M tels que $\frac{ML}{ML'} = \text{const.}$

6. Lieu des points dont les puissances par rapport à trois cercles fixes satisfont à une relation linéaire et homogène, à coefficients constants.

7. Démontrer que le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, de même origine, est égal à la puissance de O par rapport au cercle décrit sur AB comme diamètre.

8. Étant donnés deux points M_1, M_2 par leurs coordonnées, calculer

l'équation du cercle décrit sur M_1M_2 comme diamètre. (S'appuyer sur l'exercice précédent, qui donne le terme constant).

9. Démontrer que les cercles décrits sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet comme diamètre appartiennent à un même faisceau, dont l'axe radical contient les orthocentres des quatre triangles formés par les quatre côtés du quadrilatère associés trois à trois.

(On pourra prendre, par exemple, une diagonale pour axe des y, le milieu étant pris pour origine.)

10. Étant donnés deux faisceaux de cercles, on associe à chaque cercle (C) du premier le cercle (C′) du second qui lui est orthogonal.

Trouver les enveloppes de l'axe radical Δ et de la ligne des centres CC′ de ces deux cercles. Cas de dégénérescence. Solution géométrique.

(Pour la solution géométrique, remarquer que Δ découpe des divisions homographiques sur les axes radicaux des deux faisceaux; de même, CC′ sur les lignes des centres.)

11. Trouver le lieu des points de rencontre des deux cercles (C) et (C′) précédents en supposant que les deux faisceaux ont un point limite ou un point de base commun et que leurs lignes des centres sont perpendiculaires.

12. Trouver le lieu des centres de similitude d'un cercle fixe avec les cercles d'un faisceau.

13. Étant donnés deux cycles (C) et (C′), de rayon R et R′, montrer que leur cercle d'isogonalité (Γ) (n° 175) a pour équation

$$\frac{C}{R} = \frac{C'}{R'},$$

en supposant que $x^2 + y^2$ ait le même coefficient dans C et C′.

14. Le cercle (C) précédent étant supposé fixe, on imagine que (C′) varie tout en faisant partie d'un faisceau donné. Former l'équation générale, en fonction rationnelle d'un paramètre, du cercle (Γ). Montrer que ce cercle est orthogonal à un cercle fixe. Cas où le faisceau donné a ses deux points de base confondus. Solution géométrique.

[Le cercle fixe est orthogonal à (C) et à tous les (C′). Dans le cas des points de base confondus, il y a une infinité de cercles isogonaux.]

15. Étant donnés deux cycles, de centres O_1, O_2 et de rayons R_1, R_2,

trouver le lieu des points M tels que

$$\frac{\overline{MO_1}^2}{R_1} - \frac{\overline{MO_2}^2}{R_2} = R_1 - R_2.$$

(Cercle d'isogonalité.)

16. Lieu des centres des cercles (C) qui coupent deux cercles donnés (C_1) et (C_2) sous des angles donnés V_1 et V_2.

17. Soient trois cycles (C_1), (C_2), (C_3) appartenant à un même faisceau et de rayons respectifs R_1, R_2, R_3. Un cycle quelconque du plan les coupe sous les angles V_1, V_2, V_3. Démontrer la relation

$$\overline{O_2O_3}\,R_1\cos V_1 + \overline{O_3O_1}\,R_2\cos V_2 + \overline{O_1O_2}\,R_3\cos V_3 = 0.$$

En déduire que les cercles (C) de l'Exercice précédent coupent sous un angle constant tout cercle du faisceau (C_1, C_2) et qu'ils sont, en particulier, orthogonaux au cercle d'isogonalité des deux cycles (C'_1) et (C'_2) de centres O_1 et O_2 et de rayons $R_1\cos V_1$ et $R_2\cos V_2$.

18. Trouver les cercles qui appartiennent à un faisceau donné (f) et qui coupent un cercle donné (C) sous un angle donné $V \neq \frac{\pi}{2}$. Montrer qu'on peut, sans changer le résultat, remplacer l'angle V par un autre angle quelconque $V' \neq \frac{\pi}{2}$, à condition de substituer au cercle (C) un cercle (C'), de rayon $\frac{R\cos V}{\cos V'}$ et appartenant au faisceau déterminé par (C) et la ligne des centres de (f). Déduire de là, en prenant $V' = 0$, une construction des cercles demandés.

19. Construire un cercle coupant sous le même angle donné V trois cycles donnés. Cas où $V = 0$. (*Cf.* n°176 et Exercice précédent.)

20. Construire un cercle coupant trois cycles donnés (C_1), (C_2), (C_3) sous des angles donnés V_1, V_2, V_3.

[Un tel cercle doit appartenir au faisceau orthogonal aux cercles d'isogonalité des trois cycles (C'_1), (C'_2), (C'_3), concentriques aux cycles proposés et de rayons $R_1\cos V_1$, $R_2\cos V_2$, $R_3\cos V_3$ (Exercice 17). On est dès lors ramené à l'Exercice 18].

CHAPITRE XII.

LA SPHÈRE.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Étant donnés trois axes rectangulaires* $Oxyz$, *on prend les points* A *sur* Ox, B *sur* Oy, C *sur* Oz.

1° *Équation générale des sphères* (S) *qui passent par ces trois points :*

2° *Soient* I *le centre d'une quelconque de ces sphères et* I_0 *le centre de la sphère* (S_0) *circonscrite au tétraèdre* OABC. *Soit enfin* H *la projection de* O *sur le plan* ABC. *Démontrer que la puissance de* O *par rapport à* (S) *est égale à* $2\overline{OH}.\overline{I_0I}$.

3° *Démontrer que la sphère* (S_1), *qui admet comme grand cercle le cercle circonscrit au triangle* ABC, *coupe suivant un grand cercle la sphère* (Σ) *de centre* O *et de rayon* OH.

4° *Démontrer que la sphère* (S_2), *qui est orthogonale en* A, B, C *à* (S_0), *coupe suivant un grand cercle la sphère* (Σ'), *dont le centre est en* O *et qui est tangente à* (S_0).

Soit $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$.

1° Les sphères (S) peuvent être considérées comme appartenant au faisceau défini par le plan ABC et par la sphère (S_0). Or, cette dernière a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0, \tag{1}$$

comme on le constate en remarquant que l'équation aux abscisses de ses points de rencontre avec Ox, par exemple, doit admettre 0 et a pour racines, de sorte que les termes indépendants de y, z sont nécessairement $x^2 - ax$ [1].

[1] On peut aussi observer que le centre a pour coordonnées $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$, puisqu'il se trouve dans les plans perpendiculaires aux milieux de OA, de OB, de OC. En outre, il ne doit pas y avoir de terme constant, puisque la sphère passe à l'origine.

En second lieu, le plan ABC a pour équation

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0. \tag{2}$$

L'équation générale des sphères (S) est donc (n° 186)

$$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz-\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1\right)=0, \tag{3}$$

où λ désigne un paramètre arbitraire, qui représente d'ailleurs la puissance de l'origine par rapport à (S).

2° Les cooordonnées du centre I de la sphère (3) sont

$$\xi=\frac{1}{2}\left(a+\frac{\lambda}{a}\right),\qquad \eta=\frac{1}{2}\left(b+\frac{\lambda}{b}\right),\qquad \zeta=\frac{1}{2}\left(c+\frac{\lambda}{c}\right). \tag{4}$$

Lorsque λ varie, ce point décrit une droite, de paramètres directeurs $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$, perpendiculaire, par conséquent, au plan ABC; comme cela est, du reste, évident géométriquement. Si nous orientons cette droite par les cosinus directeurs $\frac{1}{am}, \frac{1}{bm}, \frac{1}{cm}$, où l'on a posé, pour abréger l'écriture,

$$m=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}, \tag{5}$$

la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{I_0I}$ est, en remarquant que I_0 est obtenu pour la valeur $\lambda=0$,

$$\overline{I_0I}=\frac{1}{2}\lambda m. \tag{6}$$

D'autre part, si l'on pose $h=\overline{OH}$, les coordonnées du point H sont $\frac{h}{am}, \frac{h}{bm}, \frac{h}{cm}$. Écrivant qu'elles vérifient (2), nous avons

$$\frac{h}{m}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=1$$

ou, d'après (5),

$$h=\frac{1}{m}. \tag{7}$$

On a donc

$$2\overline{I_0I}.\overline{OH}=\lambda m\frac{1}{m}=\lambda. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

3° Écrivons que I se trouve dans le plan ABC :

$$\frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b} + \frac{\zeta}{c} - 1 = 0$$

ou

$$\lambda\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + 1 = 0;$$

d'où

$$\lambda = -\frac{1}{m^2} = -h^2 = -\overline{OH}^2.$$

Le point O a donc même puissance par rapport aux deux sphères (S_1) et (Σ). Il se trouve donc dans leur plan radical. Comme ce plan est aussi le plan du cercle d'intersection des deux sphères, celui-ci est bien un grand cercle de (Σ).

4° Écrivons que les sphères (1) et (3) sont orthogonales (n° 185) :

$$\frac{1}{2}\left[a\left(a + \frac{\lambda}{a}\right) - b\left(b + \frac{\lambda}{b}\right) - c\left(c + \frac{\lambda}{c}\right)\right] = \lambda$$

ou

$$\lambda = -(a^2 + b^2 + c^2).$$

D'autre part, le rayon de (Σ') est égal au diamètre de (S_0), c'est-à-dire égal à $2OI_0 = 2\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{4}} = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$. Le carré de ce rayon est égal à $-\lambda$. Le point O a donc même puissance par rapport à (S_2) et à (Σ'). Le raisonnement s'achève comme précédemment.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Trouver l'équation de la sphère qui passe par les points (1, 2, −1), (3, −1, 0), (2, 1, 1), (0, 3, 1). Centre et rayon de cette sphère. Équations du cercle passant par les trois premiers points. Centre et rayon de ce cercle. Équations de son axe. Équations paramétriques du cercle, en prenant pour variable l'angle d'un rayon avec le rayon qui aboutit au premier des points donnés.

2. Former l'équation générale des sphères tangentes à Ox et à Oy. Quel est le lieu des centres de celles de ces sphères qui sont orthogonales à une sphère donnée ou bien tangentes à une droite donnée ou bien tangentes à un plan donné?

3. Trouver le lieu des centres des sphères qui passent par deux points donnés A et B et qui sont tangentes à une droite donnée, perpendiculaire à AB. (E. P., 1913).

4. Soit un trièdre trirectangle $Oxyz$. Par le point A(o, o, h), on mène la droite (D), parallèle à xOy et d'angle polaire φ. Par le point A'(o, o, $-h$), on mène (D'), parallèle à xOy et d'angle polaire $-\varphi$.

1° Former l'équation de la sphère (S), qui a pour centre un point donné I(α, β, o) de xOy et dont un diamètre a une extrémité M sur (D) et l'autre M' sur (D').

2° La sphère (S) rencontre de nouveau (D) en M_1 et (D') en M'_1. On construit la sphère (S_1), de diamètre $M_1M'_1$. Puis, on construit une sphère (S_2), en partant de (S_1), comme (S_1) a été construite à partir de (S). De (S_2) on déduit de même (S_3) et ainsi de suite. Former l'équation de la sphère (S_n). Quelle est la limite de cette sphère, quand n augmente indéfiniment?

3° On suppose que le plan radical de (S) et de (S_1) passe par un point fixe P de xOy. Montrer que les sphères (S) et (S_1) passent chacune par deux points fixes : Q, Q' pour (S) et Q_1, Q'_1 pour (S_1). Quel est le lieu de ces points, quand P décrit xOy? Où doit se trouver P pour qu'ils soient réels? Montrer que les droites QQ' et $Q_1Q'_1$ percent xOy en deux points qui forment un parallélogramme avec O et P. Lieux des centres de (S) et de (S_1).

4° Montrer que, si les plans (M', D) et (M, D') sont rectangulaires, la sphère (S) passe par deux points fixes. Lieu de I, dans cette hypothèse.

5° On suppose que le rapport $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{M'M'_1}}$ reste constant. Quel est alors le lieu de I? Par tout point P de l'espace passent deux sphères (S). Où doit se trouver P pour qu'elles soient réelles ou bien orthogonales?

5. Étendre à l'espace les exercices proposés n° 5, 6, 7, 8 du Chapitre précédent.

6. On donne deux cercles (C) et (C'). Le premier est tangent en O à Oz et a pour centre le point (a, o, o); le second est tangent en O à Oy et a pour centre le point ($-a$, o, o). On prend un point M quelconque sur (C) et un point M' quelconque sur (C').

1° Trouver le lieu du centre du cercle (Γ) circonscrit au triangle OMM';

2° Calculer, en fonction des abscisses des points M et M', le rayon de (Γ), la distance MM', le cosinus de l'angle $\widehat{MOM'}$, la tangente de l'angle des

deux sphères (S) et (S′) qui passent, la première par le cercle (C) et le point M′, la seconde par le cercle (C′) et le point M. Montrer, en particulier, que ce dernier angle demeure constant, quand on a

$$\overline{OM}^2 + \overline{OM'}^2 = \frac{8}{3}a^2.$$

3° Calculer, en fonction des abscisses de M et de M′, l'équation de la sphère (Σ), qui a son centre sur Ox et qui passe par M et M′, ainsi que l'équation de la sphère (Σ′) orthogonale en M et M′ au cercle (Γ). Démontrer que cette dernière sphère coupe suivant un grand cercle la sphère de centre O et de rayon $2a$.

4° On suppose que l'on a constamment $\frac{1}{\overline{OM}^2} + \frac{1}{\overline{OM'}^2} = \frac{2}{k^2}$, k désignant une constante donnée. Démontrer que (Σ) appartient alors à un faisceau fixe, dont on cherchera les points limites. Démontrer également que la sphère (Σ′) ne fait que tourner autour de Ox, en restant égale à elle-même.

7. Étant donnés deux faisceaux de sphères ayant un point limite commun, on associe à chaque sphère du premier faisceau la sphère du second faisceau qui lui est orthogonale. Trouver le lieu de l'intersection de ces deux sphères. (Sphère.)

8. On considère les sphères (S) tangentes en un point donné A de Ox au plan zOx et les sphères (S′) tangentes en un point donné B de Oy au plan xOy. On associe les premières avec les secondes de manière qu'elles soient tangentes. Trouver les lieux de leur point de contact, de leur centre de similitude, de la droite qui joint leurs centres, ainsi que l'enveloppe de leur plan tangent commun.

(Les lieux sont des coniques et un hyperboloïde à une nappe. L'enveloppe est un cône du second degré.)

9. On donne deux droites (D) et (D′) non dans un même plan.

1° Former l'équation générale des sphères (S) tangentes à ces deux droites. Lieu de leurs centres.

2° Soit (S_0) une de ces sphères. Montrer que les droites (Δ), qui sont tangentes à (S_0) et qui s'appuient sur (D) et (D′), se répartissent en deux familles. Lieu de leurs points de contact avec (S_0).

3° Montrer que les droites (Δ) d'une même famille sont tangentes à une infinité de sphères (Σ), tangentes elles-mêmes à (D) et à (D′). Lieu des centres de ces sphères.

4° Chaque droite (Δ) rencontre (D) en M et (D′) en M′. Trouver le lieu du centre de la sphère tangente en M à (D) et en M′ à (D′).

5° Montrer que la sphère (U), décrite sur MM′ comme diamètre reste tangente, quand (Δ) varie, à une infinité de sphères (U′). Montrer que les sphères (U) et (U′) appartiennent chacune à un réseau fixe. Trouver les lieux de leurs centres.

(Les questions 2° et 3° faisaient partie du sujet de Mathématiques élémentaires proposé à l'Agrégation en 1891.)

[Définir les droites (D) et (D′) comme dans l'Exercice n° 4.

Si M_0 et M'_0 sont les points de contact de (S_0) avec (D) et (D′), on écrira que $\overline{MM'}^2 = (\overline{M_0M} \pm \overline{M'_0M'})^2$, le double signe donnant les deux familles de droites Δ. En prenant, par exemple, le signe +, le point de contact P de Δ et de (S_0) est donné par $\frac{\overline{PM}}{\overline{PM'}} = -\frac{\overline{M_0M}}{\overline{M'_0M'}}$. Son lieu est un cercle passant par M_0, M'_0 et de plan parallèle à Ox.

On constate que la condition de contact de MM′ avec (S_0) est, toujours en prenant le signe + indiqué ci-dessus, indépendante de l'ordonnée β_0 du centre de (S_0). On en déduit l'existence des sphères (Σ).

Le centre I(α, β, o) de (U) décrit une hyperbole (H) du plan des xy. En écrivant la condition de contact de (U) avec une sphère quelconque (U′), on constate qu'on peut identifier cette condition avec l'équation de (H), et cela d'une infinité de manières. Le lieu du centre de (U′) est l'ellipse (E) focale de (H) (*cf.* n^{os} 584 à 586).

On peut donner une démonstration géométrique de 2° en menant par M une parallèle à (D′), qui rencontre M'_0P en N. On montre que

$$MN = MM_0 = MP;$$

donc M_0N est parallèle à Ox, par exemple, et le plan $NM_0M'_0$ est un plan fixe Π, qui coupe (S_0) suivant un cercle Γ, lieu de P.

En coupant par un plan Π_1 parallèle à Π, on obtient les points M_1 sur D, M'_1 sur D′, P_1 sur Δ. On montre que Δ est tangente à la sphère (Σ) tangente en M_1 à D et en M'_1 à D′. Le centre de cette sphère se trouve dans les plans perpendiculaires au milieu de M_0P et au milieu de M'_0P. Il décrit l'axe de Γ.

En faisant varier soit M'_0, soit M_0, on voit que le lieu des centres des sphères (Σ) [ou (S)] est doublement réglé; c'est un paraboloïde hyperbolique équilatère, d'axe Oz.

Lorsque Δ varie, chaque point tel que P_1 décrit un cercle Γ_1. Tous ces cercles ont même axe. Donc Δ engendre un hyperboloïde de révolution, dont D et D′ sont deux génératrices. Les points M et M′ décrivent, de ce

fait, des divisions homographiques. On peut en déduire que le lieu de la projection sur xOy du centre de la sphère tangente en M à D et en M' à D' est une conique.

[Le lieu du centre de (U) est la section de l'hyperboloïde ci-dessus par xOy.]

10. Pour qu'une sphère soit isogonale à deux sphères orientées, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à leur *sphère d'isogonalité* (*cf.* n° 175).

11. Les sphères isogonales à trois sphères orientées forment un réseau (*cf.* n° 176).

12. Les sphères isogonales à quatre sphères orientées forment un faisceau. Quand l'orientation des sphères n'est pas donnée, il existe huit faisceaux analogues.

13. Étendre à la sphère les Exercices proposés n^{os} 12, 13, 14, 15 du Chapitre précédent.

14. Lieu des centres des sphères qui coupent trois sphères données sous des angles donnés. (Conique, dont le plan passe par l'axe radical des trois sphères.) Montrer que ces sphères appartiennent toutes à un même réseau.

15. Soient quatre sphères orientées (S_1), (S_2), (S_3), (S_4), appartenant à un même réseau, de centres O_1, O_2, O_3, O_4, et de rayons R_1, R_2, R_3, R_4. Une sphère orientée quelconque les coupe suivant les angles V_1, V_2, V_3, V_4. Démontrer la relation

$$\begin{aligned}\text{aire } O_2O_3O_4 . R_1 \cos V_1 &- \text{aire } O_3O_4O_1 . R_2 \cos V_2 \\ &+ \text{aire } O_4O_1O_2 . R_3 \cos V_3 \\ &- \text{aire } O_1O_2O_3 . R_4 \cos V_4 = 0.\end{aligned}$$

Que peut-on en conclure relativement à l'exercice précédent ? (*Cf.* Exercice proposé n° 17 du Chapitre XI.)

16. On donne trois sphères orientées (S_1), (S_2), (S_3), de centres non en ligne droite. Trouver le lieu des centres des sphères (Σ) tangentes à ces trois sphères orientées. Montrer que lesdites sphères passent par deux points fixes et qu'elles sont tangentes à une infinité de sphères (S) passant, elles aussi, par deux points fixes et dont on cherchera le lieu

des centres. Quel est le lieu des points de contact des sphères (Σ) avec une sphère (S) ou des sphères (S) avec une sphère (Σ)?

[On prendra pour axe des z l'axe radical des sphères (S_1), (S_2), (S_3), et pour plan des xy le plan des centres, l'axe des x étant, en outre, perpendiculaire à l'axe de similitude (Δ). Si a désigne l'abscisse de cette dernière droite (parallèle à Oy), le rayon R_i de (S_i) est de la forme

$$R_i = k(\alpha_i - a),$$

α_i désignant l'abscisse du centre de (S_i) et k une certaine constante.

Le lieu des centres de (Σ) est une conique (C) d'axe Ox et de plan zOx. Les points fixes sont les points de rencontre de (Δ) avec le cercle orthogonal aux sphères proposées. Si α et R sont l'abscisse du centre et le rayon de (Σ), on a

$$\alpha = Rk.$$

Les sphères (S) passent par les points communs aux trois sphères (S_1), (S_2), (S_3). Le lieu de leurs centres est une conique, focale de (C). Si α' et R′ sont l'abscisse du centre et le rayon de (S), on a

$$R' = k(\alpha' - a).$$

Le lieu des points de contact des sphères (Σ) avec une sphère (S) est un cercle, dont le plan passe par Oz. Le lieu des points de contact des sphères (S) avec une sphère (Σ) est un cercle, dont le plan passe par (Δ). (*Cf.* Exercices n^{os} 9 et 14, et aussi n° 587).]

17. Étendre à la sphère les Exercices proposés n^{os} 18, 19, 20 du Chapitre précédent.

18. Étendre la théorie des cercles isogonaux (n^{os} 175 et 176) aux cercles tracés sur une sphère. (S'appuyer sur le n° 190 et sur l'Exercice proposé n° 10.)

19. On considère les cercles C de la sphère U, de centre O et de rayon 1. Si I est le centre de l'un d'eux, on peut l'orienter autour de $\overrightarrow{OI}$ ou de $\overrightarrow{IO}$ (n° 27). Suivant le cas, on considérera son rayon algébrique r comme positif ou négatif.

Cela posé, au *cycle* C, on fait correspondre le point P′ de OI tel que $\overline{IP} = ir$, c'est-à-dire le centre d'une des sphères de rayon nul pas-

sant par C. (Le centre de l'autre sphère correspond au cycle orienté dans le sens opposé de C.)

1° Calculer l'équation du plan et les coordonnées du centre de C en fonction des coordonnées α, β, γ de P.

2° Étant donnés deux cycles C et C′ représentés par les points P et P′, calculer le cosinus de leur angle V en fonction rationnelle de α, β, γ, α', β', γ'.

3° Si C′ reste fixe et V constant, le lieu de P est une sphère S passant par C′. Calculer l'angle V′ sous lequel elle coupe U. Montrer que, si $V = \frac{\pi}{2}$, S est orthogonale à U, et que, si $V = 0$ ou π, S est une sphère de rayon nul.

Réciproquement, si P décrit une sphère fixe S, le cercle C coupe un cercle fixe C′ sous un angle constant, qui est égal à $\frac{\pi}{2}$, si S est orthogonale à U, à 0 ou à π, si S est de rayon nul.

4° Si C coupe deux cercles fixes C_1 et C_2 sous des angles constants V_1 et V_2, P décrit un cercle Γ, qui passe par l'intersection de C_1 et de C_2. En conclure que tous les cercles C coupent sous un angle constant tout cercle C′ du faisceau sphérique (C_1, C_2). En particulier, si $V_1 = V_2 = \frac{\pi}{2}$ ou bien si C_1 et C_2 sont de rayon nul, les cercles C′ forment un faisceau orthogonal au précédent. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, le cercle Γ est orthogonal à U.

5° Les cercles C isogonaux à deux cercles fixes sont tous orthogonaux à un cercle de leur faisceau, qui est leur *cercle d'isogonalité*.

6° Montrer qu'il y a deux cycles coupant trois cycles donnés sous des angles donnés.

[Pour calculer l'angle V, il est commode d'évaluer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{IP}$ et $\overrightarrow{I'P'}$, en utilisant la formule (1) de l'Exercice proposé n° 11 *bis* du Chapitre VIII.

Le lecteur pourra reprendre tout ce qui précède en considérant les cercles C du plan des xy.]

CHAPITRE XIII.

TANGENTES ET PLANS TANGENTS.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Étant données deux courbes orientées* (C) *et* (C_1), *soient* M *et* M_1 *deux points variables quelconques pris l'un sur* (C), *l'autre sur* (C_1). *Soient s l'abscisse curviligne de* M *et* MT *la demi-tangente positive en ce point,* s_1 *l'abscisse curviligne de* M_1 *et* M_1T_1 *la demi-tangente positive en ce point. Démontrer que la différentielle de la longueur* MM_1 *est donnée par la formule*

$$(1) \qquad d.MM_1 = -ds\cos\widehat{M_1MT} - ds_1\cos\widehat{MM_1T_1}.$$

Soient x, y, z et x_1, y_1, z_1 les coordonnées de ces deux points. On a

$$\overline{MM_1}^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2;$$

d'où

$$(2) \quad MM_1.dMM_1 = (x-x_1)(dx-dx_1) + (y-y_1)(dy-dy_1) + (z-z_1)(dz-dz_1).$$

Appelons a, b, c les cosinus directeurs de MT; a_1, b_1, c_1 ceux de M_1T_1; α, β, γ ceux de la demi-droite MM_1; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ceux de la demi-droite M_1M. On a (n° 193)

$$dx = a\,ds, \qquad dy = b\,ds, \qquad dz = c\,ds,$$
$$dx_1 = a_1 ds_1, \qquad dy_1 = b_1 ds_1, \qquad dz_1 = c_1 ds_1;$$
$$\frac{x_1-x}{MM_1} = \alpha = -\alpha_1, \qquad \frac{y_1-y}{MM_1} = \beta = -\beta_1, \qquad \frac{z_1-z}{MM_1} = \gamma = -\gamma_1.$$

Moyennant ces formules, l'équation (2) peut s'écrire, en ordonnant par rapport à ds et ds_1 et divisant par MM_1,

$$dMM_1 = ds(-a\alpha - b\beta - c\gamma) - ds_1(a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1).$$

Mais, d'après la formule générale (21) du n° 31, cela n'est autre que la relation (1) qu'il s'agissait de démontrer.

Solution géométrique. — Soit $M'M'_1$ une position infiniment voisine du segment MM_1. Projetons l'égalité géométrique

$$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M'_1} + \overrightarrow{M'_1M_1}$$

sur la droite MM_1, orientée de M vers M_1. La projection de $\overrightarrow{MM_1}$ est la longueur l de ce vecteur. La projection de $\overrightarrow{M'M'_1}$ est $(l + dl)\cos\varepsilon$, ε désignant l'angle $\left(\widehat{MM_1, M'M'_1}\right)$. Cet angle étant infiniment petit, son cosinus est égal à 1, au second ordre près; de sorte que la projection de $\overrightarrow{M'M'_1}$ peut être remplacée par $l + dl$. Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est infiniment voisin de la tangente MT et peut être considéré comme ayant pour mesure algébrique ds sur cette tangente. Sa projection sur MM_1 est donc

$$ds\cos\widehat{M_1MT}.$$

De même, la projection de $\overrightarrow{M_1M'_1}$ est

$$ds_1\cos\left(\widehat{MM_1, M_1T_1}\right) = -ds_1\cos\widehat{MM_1T_1}.$$

Finalement, on peut écrire, aux infiniment petits du second ordre près,

$$l = ds\cos\widehat{M_1MT} + l + dl + ds_1\cos\widehat{MM_1T_1};$$

d'où

$$dl = -ds\cos\widehat{M_1MT} - ds_1\cos\widehat{MM_1T_1}. \tag{3}$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Le raisonnement précédent, qui est le type des raisonnements de Géométrie infinitésimale, ne doit pas être considéré comme un raisonnement approché, sous prétexte qu'on a négligé des infiniment petits du second ordre. Il est parfaitement rigoureux, à la condition de ne pas considérer, dans la formule (3), les quantités dl, ds, ds_1 comme les accroissements des variables l, s, s_1, mais seulement comme les parties principales de ces accroissements ou, ce qui revient au même (t. I, n° 138), comme les différentielles de l, s, s_1.

2. *Étant donnée une courbe plane* C, *on projette le point fixe* O, *en* P, *sur la tangente* MT *à cette courbe.*

1° *Montrer que la normale en* P *à la podaire passe par le milieu* I *de* OM.

2° *Le point* O *est un point multiple d'ordre égal à la classe de* C *et dont les tangentes sont perpendiculaires aux tangentes à* C *issues de* O.

1° Soient x, y les coordonnées de M et α l'angle polaire de MT. L'équation de MT s'écrit

$$(X - x)\sin\alpha - (Y - y)\cos\alpha = 0.$$

On en déduit sans peine que les coordonnées de P sont

$$x_1 = \lambda\sin\alpha, \qquad y_1 = -\lambda\cos\alpha, \tag{1}$$

en posant

$$\lambda = x\sin\alpha - y\cos\alpha. \tag{2}$$

L'équation de la normale en P à la podaire est (n° 209)

$$(X - x_1)\,dx_1 + (Y - y_1)\,dy_1 = 0.$$

Écrivant qu'elle passe par $I\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$, nous avons la condition

$$(x - 2\lambda\sin\alpha)\,dx_1 + (y + 2\lambda\cos\alpha)\,dy_1 = 0. \tag{3}$$

Or, de (1), on tire

$$dx_1 = d\lambda\sin\alpha + \lambda\cos\alpha\,d\alpha, \qquad dy_1 = -d\lambda\cos\alpha + \lambda\sin\alpha\,d\alpha.$$

Portant dans (3), notre condition devient

$$d\lambda(x\sin\alpha - y\cos\alpha - 2\lambda) + \lambda\,d\alpha(x\cos\alpha + y\sin\alpha) = 0$$

ou, en tenant compte de (2) et divisant par λ,

$$-d\lambda + d\alpha(x\cos\alpha + y\sin\alpha) = 0. \tag{4}$$

Or, cette équation n'est autre que l'équation (2) différentiée, si l'on se souvient que dx et dy sont proportionnels à $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$. Le théorème est donc démontré.

2° Le point P vient en O lorsque MT passe par O. Or, ceci arrive p fois si p est la classe de C. Donc, O est un point multiple d'ordre p. Quand P tend vers O, OP tend vers la perpendiculaire à la tangente OMT. Les p tangentes en O à la podaire sont donc perpendiculaires aux p tangentes à C issues de O.

3. *Trouver les points multiples de la courbe*

$$(1)\qquad x=\frac{5t^2-2t}{4t^2-1},\qquad y=\frac{4t^3-7t^2+8t+4}{2t+1}.$$

Appliquons la méthode générale du n° 201. Nous avons le système

$$(2)\qquad (5t^2-2t)(4t'^2-1)-(5t'^2-2t')(4t^2-1)=0,$$

$$(3)\qquad (4t^3-7t^2+8t+4)(2t'+1)-(4t'^3-7t'^2+8t'+4)(2t+1)=0$$

ou, en divisant par $t-t'$ et posant $t+t'=p$, $tt'=q$,

$$(4)\qquad 8q-5p+2=0,$$

$$(5)\qquad 8pq+4p^2-18q-7p=0.$$

Éliminons q; il vient, tous calculs faits,

$$(6)\qquad 4p^2-9p+2=0,$$

dont les racines sont 2 et $\frac{1}{4}$. En portant dans (4), on a les valeurs correspondantes de q : 1 et $-\frac{3}{32}$. Finalement, les paramètres des points doubles sont donnés par

$$(7)\qquad t^2-2t+1=0,$$

$$(8)\qquad t^2-\frac{t}{4}-\frac{3}{32}=0.$$

La première équation admet la racine double $t=1$. Il lui correspond donc un point de rebroussement (n° 202), dont les coordonnées sont $x=1$, $y=3$. Pour avoir la tangente en ce point, on peut employer bien des méthodes. Par exemple, posons $t=1+h$ et cherchons les parties principales de $x-1$ et de $y-3$:

$$(9)\qquad \begin{cases} x-1=\dfrac{t^2-2t+1}{4t^2-1}=\dfrac{h^2}{3+\dots}=\dfrac{h^2}{3}(1+\dots), \\ y-3=\dfrac{4t^3-7t^2+2t+1}{2t+1}=\dfrac{5h^2+\dots}{3+\dots}=\dfrac{5}{3}h^2(1+\dots). \end{cases}$$

La limite du rapport $\frac{y-3}{x-1}$ est 5; c'est le coefficient angulaire de la tangente cherchée.

L'équation (8) admet pour racines $\frac{1\pm\sqrt{7}}{8}$. En portant l'une ou l'autre

de ces valeurs dans (1), on obtient

$$x = -\frac{3}{4}, \qquad y = \frac{55}{16}.$$

Telles sont les coordonnées du point double. Pour avoir les tangentes, calculons les dérivées

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2(4t^2 - 5t + 1)}{(4t^2 - 1)^2} = \frac{2(t-1)(4t-1)}{(4t^2-1)^2}, \tag{10}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t(8t^2 - t - 7)}{(2t+1)^2} = \frac{2t(t-1)(8t+7)}{(2t+1)^2}. \tag{11}$$

On vérifie, en passant, qu'elles s'annulent toutes deux au point de rebroussement $t = 1$ (n° 202). En les divisant membre à membre, on a le coefficient angulaire de la tangente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(8t+7)(2t-1)^2}{4t-1}. \tag{12}$$

Pour $t = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{8}$, on trouve, en posant $\varepsilon = \pm\sqrt{7}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{32}\,\frac{9\varepsilon - 23}{\varepsilon - 1} = \frac{20 - 7\varepsilon}{32} = 0{,}046 \quad \text{et} \quad 1{,}204.$$

4. *Quel est le lieu des points de contact des plans tangents menés par un point donné de* Ox *à la surface définie par les équations paramétriques*

$$x = u + v, \qquad y = uv, \qquad z = u^2 + 4v^2. \tag{1}$$

Le plan tangent au point $M\begin{pmatrix} u, v \\ x, y, z \end{pmatrix}$ a pour équation (n° 203)

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ 1 & v & 2u \\ 1 & u & 8v \end{vmatrix} = 0,$$

ou, tous calculs faits,

$$2X(4v^2 - u^2) + 2Y(u - 4v) + Z(u - v) + u^3 + u^2 v - 4uv^2 - 4v^3 = 0,$$

ou encore

$$2X(4v^2 - u^2) + 2Y(u - 4v) + Z(u - v) + (u + v)(u^2 - 4v^2) = 0. \tag{2}$$

Écrivons que ce plan passe par le point $P(a, 0, 0)$ de Ox :

$$(3) \qquad (u^2 - 4v^2)(u + v - 2a) = 0.$$

Cette équation définit le lieu demandé, en coordonnées curvilignes sur la surface. Elle se décompose en trois équations du premier degré.

I. $u - 2v = 0$. — Portant dans (1), nous obtenons

$$(4) \qquad x = 3v, \qquad y = 2v^2, \qquad z = 8v^2,$$

équations paramétriques d'une parabole (II), dont le plan a pour équation

$$(5) \qquad z = 4y,$$

l'équation de la projection sur xOy étant, d'autre part,

$$(6) \qquad y = \frac{2}{9}x^2.$$

Si l'on fait $u = 2v$ dans l'équation (2), elle se réduit à

$$Z - 4Y = 0,$$

c'est-à-dire à l'équation (5). Donc, *le plan* (5) *est tangent à la surface tout le long de la parabole* (II).

II. $u + 2v = 0$. — Portons dans (1) :

$$(7) \qquad x = -v, \qquad y = -2v^2, \qquad z = 8v^2.$$

Ces équations représentent une parabole (II'), dont le plan et la projection sur xOy ont pour équations respectives

$$(8) \qquad z + 4y = 0,$$

$$(9) \qquad y = -2x^2.$$

Si l'on fait $u = -2v$ dans l'équation (2), elle se réduit à (8). *Le plan* (8) *est donc tangent à la surface tout le long de* (II').

III. $u + v = 2a$. — Portant dans (1), il vient

$$(10) \qquad x = 2a, \qquad y = v(2a - v), \qquad z = (2a - v)^2 + 4v^2.$$

Le lieu correspondant est une parabole (II''), située dans le plan symétrique de yOz par rapport à P et dont la projection sur yOz a pour

équation

$$(11) \qquad (5y+z-4a^2)^2-12a^2(2y+z-4a^2)=0.$$

Si l'on remplace u par $2a-v$ dans (2), on obtient l'équation

$$(12) \quad (-4a^2+4av+3v^2)(X-a)+Y(2a-5v)+Z(a-v)=0,$$

qui représente cette fois un plan variable, passant par P. L'enveloppe de ce plan a pour équation (n° 280)

$$(13) \quad [5y+z-4a(x-a)]^2-12a(x-a)[2y+z-4a(x-a)]=0.$$

C'est un cône du second degré, ayant pour sommet P et pour base la parabole (II″), le long de laquelle le cône est circonscrit à la surface proposée. A titre de vérification, on doit, en faisant $x=2a$ dans (13), retrouver (11); c'est ce que le lecteur constatera sans peine.

En résumé, le lieu des points de contact des plans tangents issus de P se compose des trois paraboles (II), (II′), (II″). Le cône circonscrit à partir de P se décompose en deux plans, à savoir les plans de (II) et de (II′) et en un cône du second degré, de base (II″).

5. *Les lettres* A, B, C, f, g *représentant cinq polynomes quelconques en* x, y, z, *démontrer que la surface*

$$(1) \qquad Af^2+Bfg+Cg^2=0$$

admet pour points doubles tous les points de la ligne

$$(2) \qquad f=0, \qquad g=0.$$

Désignant par $F(x, y, z)$ le premier membre de (1), vérifions que les quatre dérivées F'_x, F'_y, F'_z, F'_t sont nulles tout le long de (2). On a, par exemple,

$$F'_x\equiv A'_xf^2+B'_xfg+C'_xg^2+2Aff'_x+B(fg'_x+gf'_x)+2Cgg'_x.$$

Cette expression s'annule évidemment pour $f=g=0$. On démontrerait, par un calcul analogue, qu'il en est de même de F'_y, F'_z, F'_t.

Je dis maintenant que les dérivées secondes de F ne s'annulent pas, en général, le long de la courbe (2). En effet, F''_{x^2}, par exemple, renferme des termes ne contenant en facteur ni f, ni g, à savoir

$$2A(f'_x)^2+2Bf'_xg'_x+2C(g'_x)^2.$$

Cette expression, et par conséquent F''_{x^2}, ne s'annulera pas en général

sous la seule condition que f et g soient nuls. Il suit de là (n° 206) que tous les points de la ligne (2) sont bien des points doubles et des points doubles seulement. La ligne (2) est appelée *ligne double* de la surface.

Autre démonstration. — Soient P un point quelconque de la ligne (2) et Pλ une sécante quelconque issue de ce point. Formons l'équation aux ρ des points de rencontre de cette sécante avec la surface, en prenant le point P pour origine des ρ (n° 93). Dans le premier membre de cette équation, f renferme ρ en facteur, puisque P annule f. De même, g renferme ρ en facteur. Il s'ensuit, de manière évidente, que F renferme ρ^2 en facteur. Donc, quel que soit Pλ, le point P appartient deux fois à l'intersection ; c'est donc un point double.

Remarque. — Le théorème est évidemment vrai en Géométrie plane ; mais alors les points doubles sont les points de rencontre des deux courbes $f=0$, $g=0$.

6. *Étudier les tangentes et les normales menées par un point quelconque de* Ox *à la courbe*

$$x^3+y^2-x=0. \tag{1}$$

1° *Tangentes.* — L'équation de la tangente au point M(x, y) est (n° 197)

$$X(3x^2-1)+2Yy+y^2-2x=0. \tag{2}$$

Écrivons qu'elle passe par le point P$(a, 0)$:

$$a(3x^2-1)+y^2-2x=0. \tag{3}$$

Les points de contact des tangentes cherchées sont déterminés par le système (1), (3). De (1), on tire

$$y^2=x(1-x^2). \tag{4}$$

Portant dans (3), on a l'équation aux x des points de contact :

$$x^3-3ax^2+x+a=0. \tag{5}$$

Ayant x, on a y par (4), ce qui donne deux points symétriques par rapport à Ox.

Il y a donc, en tout, *six tangentes* issues de P. Mais elles ne sont pas forcément réelles. Pour qu'une racine de (5) conduise à deux normales réelles, il faut et il suffit qu'elle soit réelle et comprise entre $-\infty$ et -1 ou bien entre 0 et $+1$, afin que y^2 soit positif. On pourrait faire la

discussion complète en exprimant ces conditions au moyen de la théorie des équations algébriques. Nous préférons suivre une autre marche, plus simple et plus générale (¹). Nous allons *calculer a en fonction de x et étudier ses variations quand le point* M *décrit la courbe.*

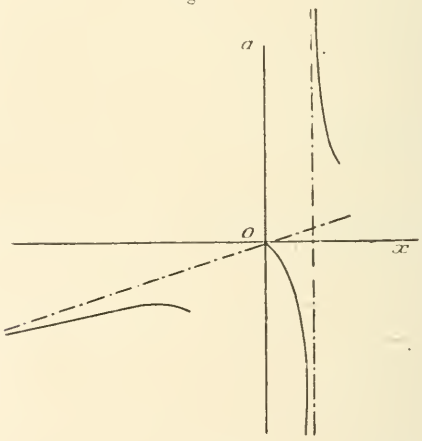
De (5), on tire

$$a = \frac{x(x^2+1)}{3x^2-1}. \tag{6}$$

Il faut étudier les variations de cette fonction, quand x croît de $-\infty$ à -1 et de 0 à $+1$. Cela ne présente aucune difficulté. La dérivée est

$$\frac{da}{dx} = \frac{3x^4-6x^2-1}{(3x^2-1)^2}.$$

Fig. 15.



Elle s'annule pour $x = -\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}} = -1,468$. On a la courbe (*fig.* 15) et le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		$-1,468$		-1	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+1$
a	$-\infty$	/	$\frac{x}{\sqrt{3}} = -0,848$	\	-1	0	\ $-\infty$	$+\infty$	\	$+1$

En coupant maintenant cette courbe par des parallèles à Ox, on a les

(¹) Elle s'applique toutes les fois qu'on étudie les tangentes à une courbe issues des points d'une droite fixe. Il suffit d'étudier les variations du point P sur cette droite, quand le point de contact M décrit toute la courbe.

tangentes à la courbe proposée issues de n'importe quel point P de Ox. On voit ainsi que le nombre de tangentes réelles est donné par le tableau suivant :

$$a : -\infty \qquad -1 \qquad -0{,}848 \qquad 0 \qquad -1 \qquad -\infty$$
$$4 \qquad 6 \qquad 2 \qquad 0 \qquad 2$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier sur la figure 22 du Chapitre XVI (Exercice résolu n° 4) que ces résultats cadrent bien avec la forme de la courbe. Signalons seulement que le point

$$I\left(x = -1{,}468,\ y = \sqrt{-\frac{2x}{\sqrt{3}}} = 1{,}302\right),$$

est *un point d'inflexion* (1).

2° *Normales.* — L'équation de la normale est

$$\frac{X - x}{3x^2 - 1} = \frac{Y - y}{2y}.$$

Écrivons qu'elle passe par P ; nous avons, en supprimant la solution $y = 0$, qui nous donnerait la normale Ox aux trois sommets,

$$\frac{a - x}{3x^2 - 1} = -\frac{1}{2}$$

ou

$$3x^2 - 2x + 2a - 1 = 0. \tag{7}$$

Il y a donc *quatre normales* issues de chaque point P. Pour discuter leur réalité, nous étudions les variations de

$$a = \frac{1 + 2x - 3x^2}{2}. \tag{8}$$

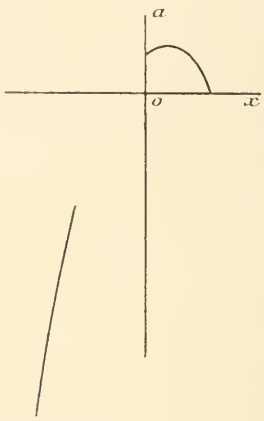
Elles sont indiquées par le tableau et la courbe (*fig.* 16) ci-dessous :

x	$-\infty$		-1	0		$\frac{1}{3}$		$+1$
a	$-\infty$	↗	-2	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{2}{3}$	↘	0

(1) D'une manière générale, quand P traverse une tangente double et, comme cas particulier, une tangente d'inflexion (n° 300), le nombre des tangentes réelles issues de P varie de deux unités. *La courbe et ses tangentes doubles séparent les différentes régions de réalité.*

En coupant la courbe par des parallèles à Ox, on a les normales à la courbe proposée issues des différents points de Ox et l'on peut dresser

Fig. 16.



le tableau suivant, qui donne le nombre des normales réelles :

$a : -\infty$		-2		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
	2		0		2		4		0	

Le lecteur confrontera ces résultats avec la forme de la courbe. Signalons seulement que les points P correspondant à $a = -2,\ 0,\ \frac{1}{2}$ sont les centres de courbure relatifs aux sommets S_1, S_2, O. Le point P correspondant à $a = \frac{2}{3}$ est le centre de courbure du point

$$N\left(x = \frac{1}{3},\ y = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = 0,544\right).$$

7. *On donne la surface*

$$xyz = 1. \tag{1}$$

1° *Calculer son équation tangentielle.*

2° *Calculer les plans tangents passant par la droite*

$$x + y - z + 2 = 0, \qquad 2x - y + 3z - 1 = 0.$$

3° *Quel est le lieu des pieds des normales abaissées des différents*

points de Ox? *Discuter leur réalité. Calculer celles qui sont issues du point* $(2, 0, 0)$.

1° Le plan tangent au point $M(x, y, z)$ a pour équation (n° 204)

$$Xyz + Yzx + Zxy - 3 = 0$$

ou

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} - 3 = 0. \tag{2}$$

Si on l'identifie avec le plan

$$ux + vy + wz + r = 0, \tag{3}$$

on a

$$x = -\frac{r}{3u}, \qquad y = -\frac{r}{3v}, \qquad z = -\frac{r}{3w}. \tag{4}$$

Portant dans (1), on a l'équation tangentielle

$$27uvw + r^3 = 0. \tag{5}$$

2° Les plans demandés sont de la forme

$$(2 + \lambda)x + (-1 + \lambda)y + (3 - \lambda)z - 1 + 2\lambda = 0. \tag{6}$$

Écrivons qu'ils vérifient (5) :

$$27(2 + \lambda)(\lambda - 1)(3 - \lambda) + (2\lambda - 1)^3 = 0.$$

Par substitutions successives, on trouve les racines

$$\lambda_1 = -2,40, \qquad \lambda_2 = 0,99, \qquad \lambda_3 = 3,61.$$

En portant dans (6), on a les plans cherchés. En appliquant ensuite les formules (4), on a leurs points de contact. On trouve ainsi les trois points

$$M_1(-4,83 ; -0,57 ; +0,36) ; \quad M_2(-0,109 ; +56,2 ; -0,163) ;$$
$$M_3(-0,369 ; -0,795 ; +3,40).$$

3° Les équations de la normale en M sont

$$(X - x)x = (Y - y)y = (Z - z)z. \tag{7}$$

Écrivons qu'elle passe par le point $P(a, 0, 0)$:

$$(a - x)x = -y^2 = -z^2. \tag{8}$$

Quel que soit P, on a

$$y = \pm z; \tag{9}$$

donc, le lieu demandé se compose des deux cubiques, sections de la surface par les plans bissecteurs du dièdre (Oxy, Oxz).

Pour avoir les normales issues d'un point P donné, il faut résoudre le système (1), (8) par rapport à x, y, z. Nous avons

$$y = \varepsilon z \qquad (\varepsilon = \pm 1); \tag{10}$$

puis

$$z^2 = \frac{\varepsilon}{x} \tag{11}$$

et enfin

$$(a - x)x = -\frac{\varepsilon}{x}$$

ou

$$x^3 - ax^2 - \varepsilon = 0. \tag{12}$$

Ayant une racine de cette équation, on a z par (11), puis y par (10); cela donne deux normales symétriques par rapport à Ox. Elles sont réelles si x est réel et du signe de ε. Or, si $\varepsilon = +1$, le polynome (12) présente une seule variation, quel que soit le signe de a. Donc, d'après le théorème de Descartes (t. I, n° 252), il y a une seule racine positive. Si $\varepsilon = -1$, on voit de même qu'il y a une seule racine négative. On conclut de là que, dans tous les cas, il y a quatre normales réelles, deux à deux symétriques par rapport à Ox.

Pour $a = 2$, on doit calculer la racine positive de

$$x^3 - 2x^2 - 1 = 0 \tag{13}$$

et la racine négative de

$$x^3 - 2x^2 + 1 = 0. \tag{14}$$

La première donne, par substitutions successives,

$$x = 2{,}205; \qquad y = z = \pm\sqrt{\frac{1}{2{,}205}} = \pm 0{,}673. \tag{15}$$

La seconde admet la racine $x = 1$. En la divisant par $x - 1$, on a l'équation du second degré

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

dont la racine négative est $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}618$; d'où les deux pieds

$$(16) \qquad x = -0{,}618; \qquad y = -z = \pm\sqrt{\frac{1}{0{,}618}} = \pm 1{,}272.$$

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Sur chaque tangente MT à une courbe (C), on prend deux points quelconques P et P′, assujettis à la seule condition que PP′ garde une longueur constante. Démontrer que les plans normaux en P et P′ aux trajectoires de ces points se coupent suivant une droite du plan normal en M à (C).

(Introduire les coordonnées x, y, z de M, les cosinus directeurs a, b, c de MT et $\overline{MP} = \rho$. Le plan normal en P coupe le plan normal en M suivant une droite qui ne dépend que de $d\rho$ et non de ρ.)

2. Étant donnée une courbe plane, la tangente en M rencontre Ox en A et Oy en B. Soit P le quatrième sommet du rectangle qui admet pour côtés OA et OB. Montrer que la tangente en P au lieu de P est symétrique de PM par rapport à PA.

(Calculer les coordonnées de P en fonction de celles de M et de l'angle polaire de la tangente.)

3. Lieu des traces, sur xOy, des tangentes à la courbe :

$$x = \frac{1-2\cos^2\varphi}{\cos\varphi}, \qquad y = \frac{1+2\sin^2\varphi}{\sin\varphi}, \qquad z = \frac{-1}{\sin 2\varphi}.$$

Normales issues d'un point donné de Oz. Montrer que les pieds forment un rectangle.

Vérifier que la courbe appartient à la surface

$$xyz - 6z^2 - 2 = 0.$$

Montrer que le lieu des points de cette surface, dont le plan tangent passe par un point donné P de Oz, se compose de trois hyperboles équilatères. Discuter la réalité de ces hyperboles suivant la position du point P sur Oz.

4. On donne la courbe plane (C) par les équations

$$x = \frac{1}{t^3+1}, \qquad y = \frac{t}{t^3+1}.$$

1° Combien peut-on mener de tangentes à cette courbe par un point P du plan ? Discuter leur réalité.

2° Former l'équation tangentielle de (C).

3° Le lieu des sommets des angles droits circonscrits est une courbe du sixième degré. Montrer qu'elle possède trois points doubles, dont un seul réel, sur la droite $x = 1$.

4° Lieu de P pour que, parmi les tangentes issues de ce point, il y en ait deux dont les points de contact soient vus de l'origine sous un angle droit.

5. Étant donnée la courbe

$$x = t^2, \qquad y = t^3,$$

trouver le lieu des points du plan d'où l'on peut lui mener trois tangentes formant un faisceau harmonique avec la parallèle à Ox ou à Oy.

(E. P., 1912.)

6. Soit la courbe $x^m y^n = 1$. Démontrer que le segment intercepté par les axes sur chaque tangente est divisé par le point de contact dans un rapport constant. Calculer l'équation tangentielle.

7. Montrer qu'il existe deux valeurs de λ pour lesquelles la courbe

$$x^2 y - a^2 x = \lambda$$

est tangente à une droite donnée. Former l'équation aux abscisses des deux points de contact. Réalité de ces points. Quel est leur lieu quand ils sont confondus ?

(*Extrait de la composition d'admission à l'École Normale en* 1886.)

8. Étant donnée une courbe plane algébrique (C), d'équation tangentielle

$$f(u, v, w) = 0,$$

former l'équation de sa podaire relativement à l'origine. Démontrer (*cf.* Exercice résolu n° 2) que, si m est la classe de (C), le point O est, pour la podaire, un point multiple d'ordre m, les tangentes en ce point étant perpendiculaires aux tangentes à (C) menées par O. Démontrer également que le degré de la podaire est $2m$, sauf si la courbe (C) est tangente à la droite de l'infini, auquel cas le degré est abaissé, en général, d'une unité.

9. Déterminer m pour que la courbe

$$x^3+y^3-xy-x-y+m=0$$

ait un point double. Déterminer les tangentes en ce point.

(Les équations $f'_x=0$, $f'_y=0$, $f'_t=0$ doivent avoir une solution commune.)

10. Chercher les points multiples des courbes

(I) $$x=\frac{t^3+1}{t},\qquad y=\frac{t^2+2t-1}{t};$$

(II) $$x=\frac{3t^3+4t}{t^3+t^2-2},\qquad y=\frac{5t^2}{t^2-2t-2};$$

(III) $$x=\frac{2t^4+3t^2-2}{t^2-1},\qquad y=2\frac{t^3-4t-2}{t^2-1}.$$

11. Étant données une surface S et sa podaire Σ par rapport à O, montrer que la normale en P à Σ passe par le milieu de OM et que le point O est, pour Σ, un point multiple d'ordre égal à la classe de S et dont le cône des tangentes est supplémentaire du cône circonscrit à S à partir de O. (*Cf.* Exercice résolu n° 2.)

[Introduire les cosinus directeurs (a, b, c) de la normale en $M(x, y, z)$. Les coordonnées de P sont de la forme $x_1=\rho a$, $y_1=\rho b$, $z_1=\rho c$. On doit vérifier que $S\left(x_1-\frac{x}{2}\right)dx_1=0$, sachant que $Sa\,dx=0$.]

12. On donne la surface (S), définie par les équations

$$x=v(2u+2v+1),\qquad y=u(u-\tfrac{1}{4}v+1),\qquad z=uv(2u+\tfrac{1}{4}v-1).$$

1° Calculer l'équation du plan tangent (H) au point $M(u, v)$.

2° Lieu de M quand (H) passe par un point fixe P, situé sur la droite $x+z=0$, $y+2z=0$. Lieu de la droite PM.

3° Lieu de M quand (H) reste parallèle à une droite fixe $O\lambda$. Cas où $O\lambda$ est dans xOz ou yOz.

4° Combien peut-on mener de plans tangents à (S) par une droite donnée (D)? Discuter la réalité de ces plans, en supposant que (D) rencontre Oz et lui est perpendiculaire.

[Remarquer que l'équation du plan tangent est divisible par $(2u+\frac{1}{4}v-1)^2-8uv$.]

13. Que peut-on dire des plans tangents à la surface

$$z = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2}$$

le long d'une section plane parallèle à xOy? (E. P., 1913.)

(Ils coupent Oz en un même point.)

14. Soit la surface $y^2 z^2 + 2xyz + x^2 - 2y = 0$.

1° Trouver le lieu des points de contact des plans tangents parallèles à Oy. (Cubique gauche.)

2° Calculer, à $\frac{1}{100}$ près, les coordonnées des pieds des normales issues du point $(0, 1, 0)$.

[On formera l'équation aux y des pieds des normales. Il restera une équation du troisième degré, après suppression des racines 0 et 1. Ayant y, on peut calculer x par $x^2 = \frac{2}{1+y}$, puis z par $z = xy$.]

15. Montrer que la surface

$$(x^2 + y^2 - 1)^2 - z(x^2 + y^2 - 1) + z^2 xy = 0$$

admet une ligne de points doubles. Le cône des tangentes en chacun de ces points se décompose en deux plans. Discuter la réalité de ces plans, suivant la position du point sur la ligne double.

16. Calculer les équations tangentielles des lignes planes

$$x^3 + y^3 = axy, \qquad x(x^2 - y^2) = a(x^2 + y^2), \qquad (x^2 + y^2)^2 - ax^3 = 0.$$

[On peut se servir des équations paramétriques.]

17. Calculer l'équation tangentielle de la surface

$$Ax^m + By^m + Cz^m = 1$$

et celle de la courbe

$$y = x^2, \qquad z = xy.$$

Discuter la réalité des normales à cette dernière courbe issues d'un point variable de Oz.

18. Montrer que la surface de l'Exercice résolu n° 1 du Chapitre IV admet le point $(1, 1, 1)$ comme point triple. [Partir de l'équation (5).]

CHAPITRE XIV.

ÉTUDE D'UNE COURBE AU VOISINAGE D'UN DE SES POINTS.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Étudier la position de la courbe*

$$x = \frac{t^3 + 1}{t^2 + 1}, \qquad y = \frac{t - 2}{t^2 - 1}$$

par rapport à sa tangente, au voisinage du point $t = 1$.

Posons $t = 1 - h$ et calculons les développements du second ordre de x et de y :

$$x = \frac{1 - (1 - h)^3}{1 - (1 - h)^2} = \frac{2 - 3h - 3h^2 - h^3}{2 - 2h + h^2} = 1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{2} - \dots,$$

$$y = \frac{-1 + h}{2 - 2h - h^2} = -\frac{1}{2} - h - \frac{3}{4}h^2 - \dots.$$

La tangente a pour équation

$$2(X - 1) - \left(Y - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

On a

$$V = 2(x - 1) - \left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}h^2 + \dots.$$

Cette quantité est positive. D'autre part, la région positive de la tangente est celle des x positifs. Donc *la courbe est concave vers les x positifs.*

2. *Déterminer les points d'inflexion de la courbe* $y = x \cot x$. *Montrer qu'ils sont en ligne droite et que les tangentes en ces points sont tangentes à une parabole.* (E. P., 1913.)

On a

$$(1) \qquad y' = \cot x - \frac{x}{\sin^2 x}, \qquad y'' = -\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{2x\cos x}{\sin^3 x}.$$

L'équation aux x des points d'inflexion est (n° 221)

$$\tan x = x. \tag{2}$$

Cette équation admet une racine et une seule dans chacun des intervalles $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, comme on le voit en coupant la courbe $y = \tan x$ par la droite $y = x$ (*cf.* t. I; *Exerc.*, Chap. XXII, Exercice résolu n° 3). Il y a donc une *infinité de points d'inflexion*.

L'équation (2) s'écrit $x \cot x = 1$. Donc ces points d'inflexion ne sont autres que les points de rencontre de la courbe avec la droite Δ, d'équation $y = 1$.

En un tel point P, le coefficient angulaire de la tangente est

$$y' = \cot x - x(1 + \cot^2 x) = \frac{1}{x} - x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = -x = -\frac{x}{y}.$$

Il en résulte que cette tangente est perpendiculaire à OP. Elle est donc tangente à une parabole de foyer O et de tangente au sommet Δ.

3. *Déterminer les points d'inflexion de la courbe*

$$x = \frac{t^2 + mt + 3}{t^2 + 1}, \qquad y = \frac{t(t^2 + mt + 3)}{t^2 + 1}.$$

Montrer qu'ils sont en ligne droite.

Employons l'équation (14) du n° 221, en prenant pour coordonnées homogènes du point courant de la courbe : $t^2 + mt + 3$, $t(t^2 + mt + 3)$, $t^2 + 1$; on obtient :

$$\begin{vmatrix} t^2 + mt + 3 & t^3 + mt^2 + 3t & t^2 + 1 \\ 2t + m & 3t^2 + 2mt + 3 & 2t \\ 1 & 3t + m & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou, en retranchant la troisième colonne de la première,

$$\begin{vmatrix} mt + 2 & t^3 + mt^2 + 3t & t^2 + 1 \\ m & 3t^2 + 2mt + 3 & 2t \\ 0 & 3t + m & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Développons suivant la première colonne :

$$mt^3 + 6t^2 - 3mt - m^2 - 6 = 0. \tag{1}$$

Il y a donc *trois points d'inflexion*. Il s'agit de démontrer qu'ils sont

sur une même droite. Soit

$$ux + cy + w = 0 \tag{2}$$

l'équation de cette droite. Elle coupe la courbe en trois points, dont les t sont donnés par l'équation

$$u(t^2 + mt + 3) + c(t^3 + mt^2 + 3t) + w(1 + t^2) = 0.$$

Cette équation doit avoir les mêmes racines que (1). Identifions :

$$\frac{c}{m} = \frac{u - cm + w}{6} = \frac{um + 3c}{-3m} = \frac{3u + w}{-m^2 - 6}.$$

Prenons, par exemple, $c = m$. On trouve en égalant le premier rapport au troisième, puis au second, $u = -6$, puis $w = 12 - m^2$. Portant dans le dernier rapport, on trouve qu'il prend la valeur 1 du premier. L'identification est donc possible et *les trois points d'inflexion sont sur la droite* (*cf.* n° 569)

$$6x - my + m^2 - 12 = 0.$$

4. *Démontrer que si les tangentes à une courbe gauche appartiennent à un complexe linéaire, le plan osculateur en un point* M *de cette courbe est le plan polaire de* M *par rapport au complexe.*

Prenons pour axe des z l'axe central du complexe et soit k son pas (n° 123). Les coordonnées du système de vecteurs (S) correspondant sont $0, 0, 1, 0, 0, k$. Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe, exprimées en fonction d'un paramètre t. La tangente MT en ce point doit être perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{S, M}$, de composantes : $-y, x, k$. On a donc, par hypothèse, tout le long de la courbe :

$$-yx' + y'x + kz' = 0. \tag{1}$$

D'autre part, le plan polaire du point M a pour équation

$$-y(X - x) - x(Y - y) + k(Z - z) = 0. \tag{2}$$

Pour qu'il soit osculateur, il faut et suffit qu'on ait (n° 227)

$$-yx' + xy' + kz' = 0, \qquad -yx'' + xy'' + kz'' = 0.$$

Or, la première de ces conditions n'est autre que (1). Quant à la seconde, elle s'en déduit par simple dérivation.

Remarque. — Les plans osculateurs à la courbe menés par un point

donné P de l'espace ont pour points de contact les points de rencontre de la courbe avec le plan polaire de P, car le plan polaire de chacun de ces points, devant passer par P, a son pôle dans le plan polaire de P (n° 125).

Inversement, les plans osculateurs aux points de rencontre de la courbe avec un plan (H) concourent au pôle de ce plan.

Parmi les courbes jouissant de ces propriétés, on peut citer toutes les cubiques gauches. On sait, en effet (Chap. XXVIII, Exercice résolu n° 6), que toute cubique gauche peut se transformer homographiquement en la suivante :

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3. \tag{3}$$

D'autre part, la transformation homographique transforme tout complexe linéaire en un complexe linéaire (Chap. XXVIII, Exercice proposé n° 10). Il suffit donc de vérifier la propriété pour la cubique (3). Or, on constate que l'équation (1) est vérifiée par les fonctions (3), si l'on prend $k = -\frac{1}{3}$.

5. *Trouver l'enveloppe des traces, sur xOy, des plans osculateurs à la courbe*

$$x = R\frac{1 + 2\cos^2\varphi}{\cos\varphi}, \qquad y = R\frac{1 + 2\sin^2\varphi}{\sin\varphi}, \qquad z = \frac{-R}{\sin 2\varphi}.$$

On a

$$x' = -R\frac{\sin\varphi\cos 2\varphi}{\cos^2\varphi}, \qquad y' = -R\frac{\cos\varphi\cos 2\varphi}{\sin^2\varphi}, \qquad z' = \frac{2R\cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi}.$$

En multipliant toutes ces quantités par $\frac{\sin^2 2\varphi}{-4R\cos 2\varphi}$, on obtient le système suivant de paramètres directeurs de la tangente

$$\alpha = \sin^3\varphi, \qquad \beta = \cos^3\varphi, \qquad \gamma = -\frac{1}{2}.$$

L'équation du plan osculateur s'écrit, dès lors (n° 226),

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \sin^3\varphi & \cos^3\varphi & -\frac{1}{2} \\ 3\sin^2\varphi\cos\varphi & -3\cos^2\varphi\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou, en divisant par $3\sin\varphi\cos\varphi$ et développant suivant la première

ligne,

$$-(X-x)\frac{\cos\varphi}{2}-(Y-y)\frac{\sin\varphi}{2}-(Z-z)\sin\varphi\cos\varphi=0.$$

Remplaçant x, y, z par leurs valeurs, nous obtenons finalement

$$X\cos\varphi+Y\sin\varphi+Z\sin 2\varphi=3R.$$

La trace sur xOy a pour équation, dans ce plan,

$$X\cos\varphi+Y\sin\varphi=3R.$$

Elle est tangente au cercle de centre O et de rayon 3R.

[Le lecteur pourra rapprocher cet Exercice de l'Exercice proposé n° 3 du Chapitre XIII, en s'appuyant, d'autre part, sur les propriétés générales des surfaces développables (n° 372).]

7. *Calculer l'équation du plan osculateur à la courbe*

$$x=\frac{t+2}{t^4+t-1},\qquad y=\frac{t^2}{t^4+t-1},\qquad z=\frac{1}{t^4+t-1}.$$

L'application des formules générales (30) ou (31) du n° 226 donne lieu à des calculs compliqués, à cause du facteur t^4-t-1 (n° 227). Employons plutôt la formule (34) relative aux coordonnées homogènes (n° 227). Nous avons l'équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ t+2 & t^2 & 1 & t^4+t-1\\ 1 & 2t & 0 & 4t^3+1\\ 0 & 1 & 0 & 6t^2 \end{vmatrix}=0$$

ou, en développant suivant la première ligne,

$$(1)\qquad x(1-8t^3)+6t^2y+z(3t^4+16t^3-3)-1=0.$$

Autrement. — Soit

$$(2)\qquad Ax+By+Cz+D=0$$

l'équation cherchée. Écrivons que l'équation aux t des points de rencontre de ce plan avec la courbe, soit

$$(3)\qquad A(t+2)+Bt^2+C+D(t^4+t-1)=0,$$

admet une racine triple. Nous devons avoir, outre (3),

$$A + 2Bt + D(4t^3 + 1) = 0. \tag{4}$$

$$2B + 12Dt^2 = 0. \tag{5}$$

Prenons $D = -1$; nous tirons successivement, de (5), (4) et (3),

$$B = 6t^2, \qquad A = 1 - 8t^3, \qquad C = 3t^4 + 16t^3 - 3.$$

Portant dans (2), on retrouve (1).

7. *Étudier, au voisinage de l'origine, la courbe*

$$x^2 - y^2 + x^3 + y^3 - 3x^4 = 0. \tag{1}$$

L'origine est un point double, dont les tangentes sont les bissectrices des axes (n° 199). Étudions d'abord la branche tangente à la première bissectrice. A cet effet, posons

$$y = x + V. \tag{2}$$

Portons dans (1) et développons, en négligeant tout terme d'ordre infinitésimal supérieur à un terme déjà obtenu (n° 223). Nous avons, en remarquant que V est, *a priori*, d'ordre supérieur à x :

$$-2Vx + 2x^3 + \ldots = 0;$$

d'où

$$V = x^2 + \ldots.$$

On en conclut que la branche considérée est concave vers les y positifs. Passons à la seconde branche. Posons

$$y = -x + V. \tag{3}$$

Nous avons

$$2Vx - 3x^4 + \ldots = 0,$$

$$V = \frac{3}{2}x^3 + \ldots.$$

La branche considérée admet O pour point d'inflexion. Elle est au-dessus de la tangente, à droite de Oy et au-dessous, à gauche.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Étudier la position de la courbe : $x = \frac{t^3 - 1}{3t^2 - 1}$, $y = \frac{t - 1}{3t^2 - 1}$, par rapport à sa tangente, au voisinage du point $t = 1$, puis au voisinage de ses points d'inflexion.

2. Étudier les courbes des Exercices résolu n° 3 et proposé n° 10 du Chapitre XIII, au voisinage de leurs points multiples.

3. Étudier la position de la courbe $y = \frac{x \sin x + 2\cos^2 x - 10}{\cos x + 2}$, par rapport à sa tangente, au voisinage du point $x = 0$.

[On est ramené à étudier le signe de la quantité

$$3(x \sin x + \cos 2x + 11) - (x + 12)(\cos x + 2).]$$

4. Étudier la position de la courbe

$$x = \frac{t \sin t - 2\cos t}{at - 2 - a^2}, \qquad y = \frac{t \cos t - 2 \sin t}{at + 2 - a^2},$$

par rapport à sa tangente, au voisinage du point $t = a$.

[On est ramené à étudier le signe de $x \cos a - y \sin a - 1$ ou de

$$(t \sin t + 2\cos t)\cos a - (t \cos t - 2\sin t)\sin a - at - 2 + a^2$$

ou de

$$(a + h)\sin h + 2\cos h - 2 - ah.]$$

5. Déterminer les points d'inflexion de la courbe $b^2y^2 = x^3(a - x)$. (E. P., 1912.)

[D'une façon générale, les points d'inflexion de la courbe $y^2 = f(x)$ sont donnés par l'équation $2ff'' - f'^2 = 0$.]

6. Démontrer que si l'on pose $\frac{y}{x} = t$, l'équation aux t des points d'inflexion peut s'écrire $\frac{d^2\left(\frac{1}{x}\right)}{dt^2} = 0$.

7. Déterminer les points d'inflexion des courbes

$$x = \frac{1}{t^2(t^2-1)}, \qquad y = \frac{1}{t(t^2-1)};$$

$$x = \frac{t^3}{t^4+1}, \qquad y = \frac{t^3+2}{t^4+1}.$$

8. Trouver la loi de succession des ordonnées des points d'inflexion de la courbe $y = e^{-ax}\sin bx$. (E. P., 1912.)

9. Équation du plan osculateur à la courbe

$$x = \frac{1}{a+t}; \qquad y = \frac{1}{b+t}, \qquad z = \frac{1}{c+t}.$$

10. Calculer l'équation du plan osculateur à la courbe

$$x = \operatorname{ch} z, \qquad y = \operatorname{sh} z.$$

Montrer que le point de rencontre de ce plan avec Oz est à une distance constante de la trace de la tangente à la courbe sur le plan des zx.

11. Équation du plan osculateur à la courbe $3z = x^2$, $9y^2 = 16zx$. (E. P., 1913.)

12. Déterminer les plans osculateurs à la courbe

$$x = \frac{t^5}{t^4-3t^2+2}, \qquad y = \frac{1}{(t+1)(t^2-2)}, \qquad z = \frac{1}{(t-1)(t^2-2)},$$

qui passent par un point donné de Ox. Discuter leur réalité.

13. Étudier, au voisinage de l'origine, les courbes

$$y - 2x + 4x^2 + y^2 + x^3 + y^3 = 0,$$

$$3x - y + 3x^2 + 2xy - y^2 + y^3 + x^2y = 0,$$

$$x^2 + 2xy + x^3 + y^4 - 2x^4 = 0.$$

CHAPITRE XV.

ASYMPTOTES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Déterminer les asymptotes de la courbe*

$$x = \frac{t^4 + t^3 + 1}{t(t+1)^2}, \qquad y = \frac{t^3 + 2t + 1}{(t+1)^2},$$

et la position de la courbe par rapport à ces asymptotes.

Les valeurs de t qui rendent x, y infinis sont 0, -1, ∞.

I. $t = 0$. — x seul est infini; $y = +1$. On a donc une asymptote parallèle à Ox et d'ordonnée $+1$.

La partie principale de x est $\frac{1}{t}$; celle de $y - 1$ est $-t^2$. On a la disposition indiquée par la figure 17, la branche de gauche correspondant à $t < 0$ et celle de droite à $t > 0$.

II. $t = -1$. — En appliquant les règles ordinaires, on trouve que $\frac{y}{x}$ tend vers 2 et que $y - 2x$ tend vers l'infini, ce qui indique une branche parabolique. Nous conseillons au lecteur de faire ces calculs. Nous allons procéder autrement, en employant les développements limités de x et de y suivant les puissances de $h = t + 1$ (n° 232). En appliquant la méthode générale du Tome I (n° 117), on trouve

$$(1) \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{h^2} - 3 - h^2 - h^3 - \dots, \\ y = -\frac{2}{h^2} + \frac{5}{h} - 3 + h. \end{cases}$$

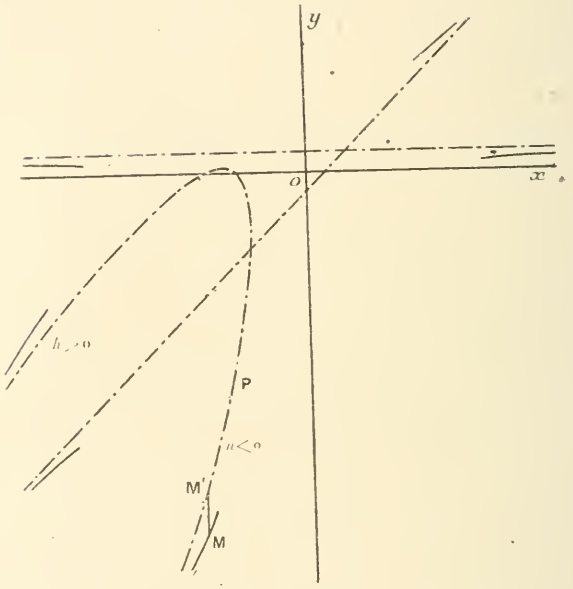
Au point M (x, y), faisons correspondre le point M$'$ (x', y') :

$$(2) \qquad x' = -\frac{1}{h^2} - 3, \qquad y' = -\frac{2}{h^2} + \frac{5}{h} - 3.$$

Quand h varie, ce point décrit une parabole P, qu'il est facile de construire (*fig.* 17). D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ a pour projections sur les axes

$$x - x' = -h^2 + \dots, \qquad y - y' = h. \tag{3}$$

Fig. 17.



Il est infiniment petit avec h. Donc, la courbe proposée admet P pour *parabole asymptote*. En outre, le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ est sensiblement parallèle à Oy, puisque $x - x'$ est du second ordre en h, tandis que $y - y'$ est du premier ordre. Cela permet de trouver la position relative des deux courbes. Pour $h > 0$, M est au-dessus de M' et, pour $h < 0$, il est au-dessous. Dans tous les cas, il est *extérieur à la parabole* (*fig.* 17).

III. $t = \infty$. — x et y deviennent infinis; $\frac{y}{x}$ tend vers 1. Puis

$$y - x = \frac{-t^3 + 2t^2 + t - 1}{t^3 + 2t^2 + t} = -1 + \frac{4}{t} + \dots$$

tend vers -1. On a donc l'asymptote

$$y - x = -1,$$

avec la disposition indiquée sur la figure 17, la branche supérieure correspondant à $t > 0$ et la branche inférieure à $t < 0$.

2. *Asymptote et position de la courbe*

$$y = \sqrt{x^4 + 2x^3 + 1} - \sqrt{x^4 + x^2 - x}.$$

Développons y suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$, en l'écrivant

$$y = x^2\left[\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

et appliquant la série du binome. Il faut pousser le développement du crochet jusqu'au terme en $\frac{1}{x^3}$, pour avoir le développement de y jusqu'au terme en $\frac{1}{x}$, puisqu'on nous demande la position de la courbe. On trouve

$$y = x - 1 + \frac{5}{8x^3} + \dots.$$

L'asymptote est donc la droite

$$y = x - 1.$$

La courbe est, au-dessus, à droite, et au-dessous, à gauche. Elle a un contact du troisième ordre avec son asymptote (n° 234).

3. *Trouver une parabole asymptote à la courbe*

$$y = \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1}{2x^2 + x - 1}.$$

Effectuons la division du numérateur par le dénominateur, suivant les puissances décroissantes de x, en poussant jusqu'au terme en $\frac{1}{x}$, afin d'avoir la position de la courbe. Nous obtenons

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{13}{8} - \frac{11}{16x} + \dots.$$

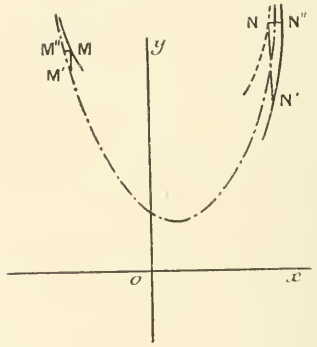
Nous avons donc la parabole asymptote (P), d'équation

$$Y = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{13}{8}$$

et la disposition indiquée sur la figure 18.

Remarques — I. La distance MM′ (*fig.* 18) est infiniment petite du premier ordre par rapport à $\frac{1}{x}$. Mais, la distance MM″ (parallèle à Ox) est du second ordre. En effet, si m est la valeur absolue du coefficient

Fig. 18.



angulaire de la tangente en M′ à la parabole, on a visiblement, en menant cette tangente, $MM'' < \frac{MM'}{m}$. Or, $m = \left| x - \frac{3}{4} \right|$ est infiniment grand du premier ordre par rapport à x; donc $\frac{1}{m}$ est infiniment petit du premier ordre par rapport à $\frac{1}{x}$ et MM″ est infiniment petit du second ordre.

Il est à remarquer d'ailleurs que $\frac{1}{OM}$ est aussi du second ordre; de sorte que MM′ est d'ordre $\frac{1}{2}$ et MM″ d'ordre 1 par rapport à $\frac{1}{OM}$.

II. Toutes les paraboles égales (P′), représentées par l'équation

$$Y' = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x + k \qquad (k = \text{const.}),$$

sont asymptotes à la courbe. En effet, la distance NN′ (*fig.* 18) a pour

limite k. Or $\frac{NN''}{\overline{ON}}$ tend vers zéro ; donc, aussi NN''. Seulement, NN'' n'est infiniment petit que d'ordre $\frac{1}{2}$ par rapport à $\frac{1}{\overline{ON}}$, tandis que MM'' était du premier ordre par rapport à $\frac{1}{\overline{OM}}$. Autrement dit (n° 233), *la courbe proposée a un contact du premier ordre avec la parabole* (P) *et seulement d'ordre* $\frac{1}{2}$ *avec les paraboles* (P').

4. *Asymptotes et position de la courbe*

$$x(x+y)(x-2y)^2+x^3+y^3+3xy=0. \tag{1}$$

Les directions asymptotiques sont données par

$$x(x+y)(x-2y)^2=0.$$

I. $x=0$. — La direction asymptotique est Oy. L'asymptote correspondante est obtenue en annulant le coefficient de y^3 dans (1) :

$$4x+1=0. \tag{2}$$

Pour avoir la position de la courbe, posons $x+\frac{1}{4}=V$. L'équation (1) devient

$$\left(V-\frac{1}{4}\right)\left(y+V-\frac{1}{4}\right)\left(2y-V+\frac{1}{4}\right)^2+y^3+\left(V-\frac{1}{4}\right)^3+3y\left(V-\frac{1}{4}\right)=0.$$

Le seul terme en y^3 est $4Vy^3$. C'est le seul que nous devions garder de ceux qui renferment V. Parmi les termes indépendants de V, celui qui a le plus haut degré est $-\frac{45}{64}y$. Si donc on réduit V à sa partie principale, on a

$$4Vy^3-\frac{45}{64}y=0;$$

d'où

$$V=\frac{45}{256}\frac{1}{y^2}>0.$$

La courbe est à droite de l'asymptote.

II. $x+y=0$. — Coupons par $x+y=\lambda$. L'équation aux x des points d'intersection est

$$x\lambda(3x-2\lambda)^2+x^3+(\lambda-x)^3+3x(\lambda-x)=0. \tag{3}$$

Annulant le coefficient de x^3, nous trouvons $\lambda = 0$. L'asymptote est donc la seconde bissectrice.

Pour placer la courbe, il nous faut la partie principale de λ en fonction de x, sachant qu'on a (3). Le seul terme en x^3 de cette équation est $9\lambda x^3$. C'est le seul que nous devions garder de ceux qui renferment λ. Parmi les termes indépendants de λ, celui qui a le plus haut degré est $-3x^2$. Si donc on réduit λ à sa partie principale, on a

$$9\lambda x^3 - 3x^2 = 0;$$

d'où

$$\lambda = \frac{1}{3x}.$$

La courbe est au-dessus de l'asymptote en bas et à droite, au-dessous en haut et à gauche.

III. $x - 2y = 0$. — Coupons par $x - 2y = \lambda$. L'équation aux y des points d'intersection est

$$(4) \qquad (2y+\lambda)(3y+\lambda)\lambda^2 + (2y+\lambda)^3 + y^3 + 3y(2y-\lambda) = 0.$$

Le terme de plus haut degré en y est $9y^3$; son coefficient ne s'annule jamais; il n'y a pas d'asymptote, mais une branche parabolique.

5. *Déterminer les asymptotes de la courbe*

$$(1) \qquad (x+2y)^3y^2 - (x+2y)x^2 + x + y + 1 = 0.$$

Les directions asymptotiques sont données par

$$(x+2y)^3y^2 = 0.$$

I. $y = 0$. — Nous annulons le coefficient de la plus haute puissance de x, soit x^3. Nous obtenons $y^2 - 1 = 0$. D'où les deux asymptotes

$$(2) \qquad y = \pm 1.$$

Le point à l'infini sur Ox est un point double.

II. $x + 2y = 0$. — Coupons par $x + 2y = \lambda$. L'équation aux y est

$$(3) \qquad \lambda^3y^2 - \lambda(2y-\lambda)^2 + \ldots = 0.$$

Elle est du second degré. La courbe étant du cinquième, nous avons affaire à un point triple, dont les asymptotes sont obtenues en annulant le coefficient de y^2 dans (3) :

$$\lambda^3 - 4\lambda = 0;$$

d'où $\lambda = 0, 2, -2$. Les trois asymptotes sont donc

$$(4) \qquad x + 2y = 0, \qquad x + 2y = 2, \qquad x + 2y = -2.$$

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Asymptotes et positions des courbes :

$$x = \frac{t^3 - t + 1}{t^4 - 4t^2}, \qquad y = \frac{2t - 1}{t(t^2 - 4)};$$

$$x = \frac{t^3 - 1}{t(t + 2)}, \qquad y = \frac{t^2}{t - 2};$$

$$x = \frac{7t^4 - 31}{(t - 1)(t^2 + 5t + 6)}, \qquad y = \frac{7t^3 + 29}{t^2 + 5t + 6};$$

$$x = \frac{\cos\varphi}{1 + 2\sin\varphi}, \qquad y = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{4\cos^2\varphi - 3};$$

$$x = \frac{e^t}{(t - 1)^2}, \qquad y = \frac{e^t(t + 2)}{t(t^2 - 1)}.$$

2. Asymptotes et positions des courbes :

$$y = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{(x - 1)^2},$$

$$y = \frac{\sqrt{x^4 + 2x^3}}{\sqrt{x^2 + 4x + 7}},$$

$$y = \sqrt{4x^2 + 4mx + m^2 + \sqrt{2}} - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \qquad (\text{cas de } m = 1);$$

$$y = 2x^2 \sin\frac{1}{x} + ax\cos\frac{1}{x} + 1 \qquad \left(\text{cas de } a = -\frac{2}{3}\right).$$

3. Paraboles asymptotes et positions des courbes :

$$y = \frac{3x^4 - 5x^3 + x^2 - 1}{x^2 + x + 1},$$

$$y = \frac{x^5 - 1}{x^3 + 2},$$

$$y = \sqrt{x^4 + x^3 - x^2 - 7x + 9} - \sqrt{2x^4 - x^3 - 2x^2 + 14x + 6}.$$

$$y = x^3 \operatorname{tang}\left(\frac{2x + a}{x^2 + 1}\right) \qquad (\text{cas de } a = 0).$$

4. Asymptotes et positions des courbes :

$$x^3 - y^3 + xy + x - y = 0,$$
$$x^2y - y^2x + x^2 + y^2 - x = 0 \qquad \text{(E. C., 1913)},$$
$$x^4 + xy^3 - y^3 + y^2x - yx^2 = 0 \qquad \text{(E. C., 1911)},$$
$$(2y - x)(x^2 + 2xy + 7y^2) + y^2 - xy + 2x - 1 = 0 \qquad \text{(E. P., 1912)}.$$
$$(x^2 - y^2)(x + y) + 2x^2 + xy - 3 = 0.$$

5. Asymptotes des courbes :

$$x^3y^2 + x^2y(2x - y) + x(x^2 - 4y^2) + y(4y - x) + x + y - 1 = 0,$$
$$(x^2 - y^2)^2 + (x - y)x^2 - (x^2 + y^2) = 0.$$

6. $\varphi(x, y)$ désignant un polynome homogène, de degré m, démontrer que les points à l'infini du faisceau $\varphi = 0$ sont des points doubles de la courbe

$$\varphi^2 + A\varphi + B = 0,$$

où A et B sont des polynomes de degrés respectifs au plus égaux à $m - 1$ et $2m - 2$.

7. Démontrer que si le facteur $\alpha x + \beta y$ figure au carré dans les termes de plus haut degré d'une courbe algébrique de degré m, sans figurer dans les termes de degré $m - 1$, il y a une branche parabolique dans la direction $\alpha x + \beta y = 0$.

(Le point à l'infini est simple; mais il compte pour deux, dans l'intersection de la courbe et de la droite de l'infini.)

8. Démontrer que l'équation générale des courbes algébriques de degré m, qui admettent pour asymptote une droite donnée, $P = 0$, peut se mettre sous la forme

$$P\varphi_{m-1} + \varphi_{m-2} = 0,$$

φ_{m-1} et φ_{m-2} désignant deux polynomes quelconques, de degrés respectifs $m - 1$ et $m - 2$.

(On pourra, par un changement de coordonnées, se ramener au cas où $P = x$. On trouvera une extension de cette proposition dans N$_{II}$, n° 55.)

9. Asymptotes de la courbe

$$xy(x + y - a - b) + k(x + y - a)(x + y - b) - k\,xy = 0.$$

Équation générale des cubiques qui les admettent pour asymptotes d'inflexion (E. P., 1912).

CHAPITRE XVI.

CONSTRUCTION DES COURBES PLANES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Construire la courbe*

$$x = \frac{5t^2 - 2t}{4t^2 - 1}, \qquad y = \frac{4t^3 - 7t^2 + 8t + 4}{2t + 1}.$$

L'intervalle de variation de t est $(-\infty, +\infty)$. On n'aperçoit pas de symétries.

Les discontinuités ont lieu pour $t = \pm\frac{1}{2}$.

Calculons les dérivées

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{2(4t^2 - 5t + 1)}{(4t^2 - 1)^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{2t(8t^2 - t - 7)}{(2t + 1)^2}.$$

Elles s'annulent, la première pour $t = \frac{1}{4}$ et $t = 1$, la seconde pour $t = -\frac{7}{8}$, $t = 0$ et $t = 1$. On en déduit le Tableau suivant, dans lequel on a intercalé la valeur $\frac{2}{5}$, qui annule x [1] :

t	$-\infty$		$-\frac{7}{8}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
x'		$+$		$+$		$+$	$+$	0	$-$		$-$			$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$			$-$	0	$+$
x	$\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$\frac{119}{44}$	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{471}{32}$	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\frac{15}{4}$	$\searrow$	$\frac{88}{25}$	$\searrow$	$\frac{27}{8}$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$-\infty$
$\frac{dy}{dx}$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	∞	$+$	$\frac{34}{125}$	$+$		$+$	5	$+$	

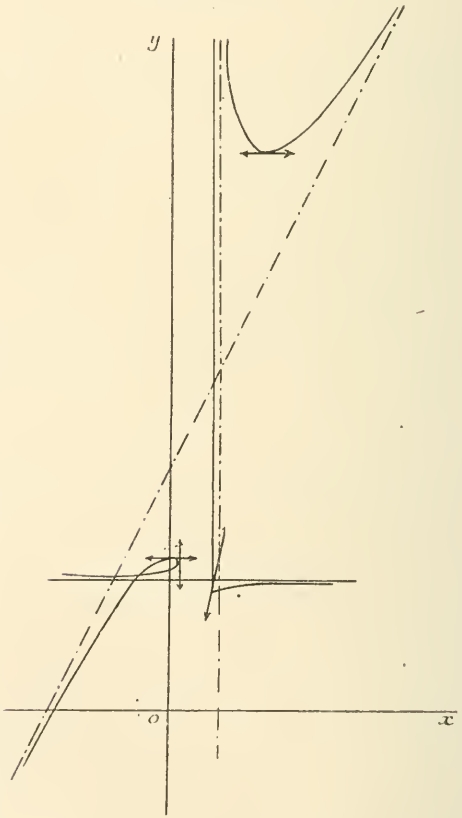
[1] Les racines de y' n'étant pas d'un calcul immédiat, nous ne nous en occupons pas.

La dernière ligne nous donne le coefficient angulaire de la tangente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(8t+7)(2t-1)^2}{4t-1}.$$

Nous avons deux asymptotes parallèles aux axes $x = \frac{5}{4}$ et $y = \frac{27}{8}$. En outre, x et y deviennent simultanément infinis pour $t = -\frac{1}{2}$. En appli-

Fig. 19.



quant la méthode classique (n° 231), on trouve que l'asymptote a pour équation

$$y - 2x = \frac{53}{8}.$$

De plus, $y - 2x - \frac{53}{8}$ a pour partie principale $-\frac{51}{8}h$. $\left(h = t + \frac{1}{2}\right)$; cela nous donne la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Enfin, au Chapitre XIII (Exercice résolu n° 3), nous avons trouvé un point de rebroussement, un point double et les tangentes en ces points.

Nous avons maintenant assez de renseignements pour tracer la courbe avec précision (*fig.* 19). L'unité de longueur employée est $u = 5^{mm}$.

2. *Construire la courbe*

$$x = \sin 2t, \qquad y = \operatorname{tang} 2t \cos t;$$

x et y admettent pour période commune 2π. Si l'on change t en $\pi + t$, x ne change pas, y change de signe. On a donc une *symétrie par rapport à* Ox et l'on peut réduire l'intervalle de variation à un intervalle quelconque de longueur π, soit, par exemple, $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$. Si l'on change t en $-t$, x et y changent de signe: on a une *symétrie par rapport à* O [1] et l'intervalle est réduit à $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Le changement de t en $\frac{\pi}{2} - t$ modifie la valeur absolue de y. On ne peut donc réduire davantage.

Les variations de x sont évidentes. Celles de y résultent de la dérivée, qui est essentiellement positive dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Pour $t = \frac{\pi}{4}$, $y = \infty$, $x = 1$; d'où l'asymptote. Pour $t = 0$, $x = y = 0$, $\frac{y}{x}$ tend vers 1: on a une branche tangente en O à la première bissectrice. Pour $t = \frac{\pi}{2}$, $x = y = 0$, $\frac{y}{x}$ tend vers zéro; on a une branche tangente en O à Ox.

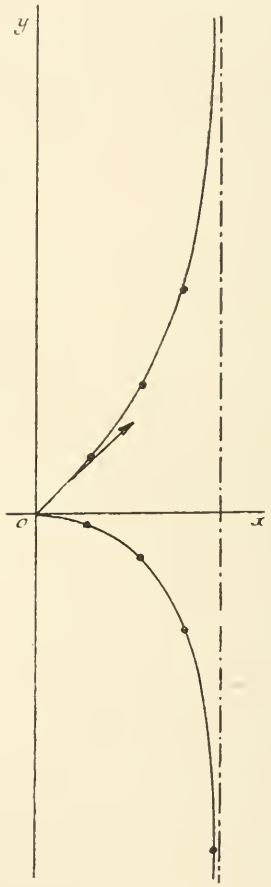
Pour que la courbe soit mieux guidée, nous avons calculé d'autres points, en faisant varier t de 10^g en 10^g. Les résultats sont donnés dans le Tableau ci-dessous :

t .	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
x...	0	0,309	0,588	0,809	0,951	1	0,951	0,809	0,588	0,309	0
y...	0	0,322	0,690	1,225	2,49	$+\infty$	$-\infty$	$-1,81$	$-0,625$	$-0,224$	$-0,051$	0

(1) D'après un théorème de Géométrie élémentaire, on en conclut que Oy est aussi un axe de symétrie, ce qui résulte d'ailleurs du changement $t \mid \pi - t$.

On en déduit la courbe ci-dessous (*fig.* 20), sur laquelle on a marqué tous les points calculés. Il suffirait de la compléter par deux symétries par rapport aux axes. Unité de longueur : $u = 25^{mm}$.

Fig. 20.



3. *Construire la courbe*

$$x^4 - y^4 + 2x^2y + 2x^2 + 4y^2 + 1 = 0. \tag{1}$$

Nous remarquons tout d'abord que l'équation est bicarrée en x; donc, la courbe admet Oy pour axe de symétrie et, de plus, *on pourra discuter par rapport à* x.

Cherchons les asymptotes. En appliquant la méthode classique (nos 235 et 236), on trouve l'asymptote

$$X - Y = -\frac{1}{2}.$$

De plus, la quantité $V = x - y + \frac{1}{2}$ a pour partie principale $-\frac{11}{8y}$, ce qui permet d'avoir la position de la courbe (n° 238).

On a l'autre asymptote par symétrie par rapport à Oy.

Discutons maintenant l'équation par rapport à x, en nous bornant à considérer les racines positives, quittes à compléter ensuite par symétrie. L'équation s'écrit

$$x^4 + 2(y+1)x^2 - y^4 + 4y^2 + 1 = 0. \tag{2}$$

La condition de réalité de x^2 est

$$(y+1)^2 + y^4 - 4y^2 - 1 \geq 0$$

ou

$$y(y^3 - 3y + 2) \geq 0$$

ou

$$y(y+2)(y-1)^2 \geq 0. \tag{3}$$

y doit donc être < -2 ou bien > 0.

Pour que x soit réel, il faut en outre que x^2 soit > 0. On est ainsi conduit à étudier le signe des racines en x^2. Le produit de ces racines est $-y^4 + 4y^2 + 1$. Écrivons, par exemple, qu'il est positif :

$$y^4 - 4y^2 - 1 < 0$$

ou

$$y^2 < 2 + \sqrt{5}. \tag{4}$$

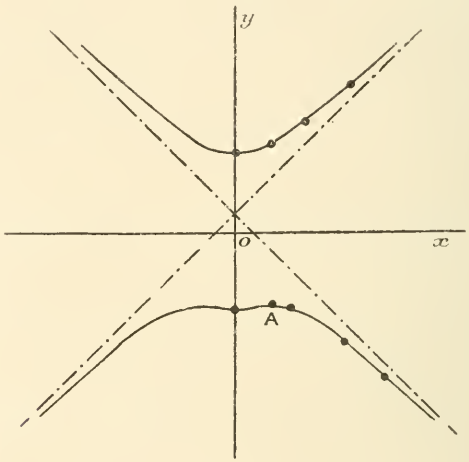
La somme $-2(y+1)$ est < 0, quand $y > 0$ et > 0, quand $y < -2$. Nous avons donc, comme valeurs remarquables de y : -2, 0, $\pm\sqrt{2+\sqrt{5}} = \pm 2{,}06$ et nous pouvons dresser le Tableau suivant :

y	$-\infty$		$-2{,}06$		-2	0		$2{,}06$		$+\infty$
Produit		$-$	0	$+$		$-$	0	$-$		
Somme		$+$		$+$		$-$		$-$		
		1 racine		2 racines		0 racine		1 racine		

Pour $y = -2{,}06$, on a une racine nulle et une racine égale à $\sqrt{-2(y+1)} = 1{,}46$. Pour $y = -2$, on a une racine double égale à 1.

La tangente au point A(1, −2) est parallèle à Ox, car cette parallèle coupe la courbe en deux points confondus en A. D'autre part, A n'est pas un point double, car, en coupant par la parallèle à Oy, on obtient, après suppression de la racine $y = -2$, l'équation $y^3 - 2y^2 - 2 = 0$, dont la seule racine réelle est 2,359. La droite $X = 1$ ne coupe donc qu'en un seul point confondu avec A.

Fig. 21.



Pour $y = +2{,}06$, l'unique racine réelle est 0. En raisonnant comme ci-dessus, on peut prouver que la tangente en chaque point de rencontre avec Oy est parallèle à Ox.

Pour mieux guider la courbe, on a calculé les points suivants :

$$(y = 3,\ x = 1{,}94); \qquad (y = 4,\ x = 3{,}12);$$
$$(y = -3,\ x = 2{,}99); \quad (y = -4,\ x = 4{,}14).$$

La courbe est représentée par la figure 21 ($u = 5^{mm}$).

4. *Construire la courbe*

$$x^3 + y^2 - x = 0.$$

Le plus simple est de tirer

$$y = \sqrt{x(1 - x^2)}$$

et d'étudier ses variations. En utilisant la dérivée $\frac{d(y^2)}{dx} = 1 - 3x^2$, on

forme tout de suite le Tableau ci-dessous :

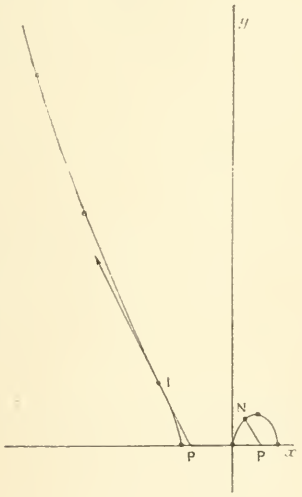
x	$-\infty$	$\searrow$	-1	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\nearrow$	1
y	$+\infty$	$\searrow$	0	0	$\nearrow$	0,62	$\searrow$	0

On a une branche parabolique dans la direction Oy. Voici quelques points de cette branche :

x :	-2	-3	-4	-5	-7	-10
y :	2,45	4,90	7,75	10,95	18,33	31,5

On peut enfin utiliser tous les renseignements obtenus dans l'Exercice résolu n° **6** du Chapitre XIII.

Fig. 22.



La courbe est représentée par la figure 22 ($u = 10^{mm}$). Il resterait à faire une symétrie par rapport à Ox.

5. *Construire la courbe*

$$x \log x = y \log y \qquad \text{(E. P., 1913)}. \tag{1}$$

L'équation ne change pas quand on échange x et y ; donc, la première bissectrice est axe de symétrie. Elle fait d'ailleurs partie de la courbe, car l'équation est vérifiée identiquement pour $x = y$. Toutefois, la partie

positive seule convient, car x et y doivent être positifs, à cause des logarithmes.

Pour trouver le reste de la courbe, s'il existe, construisons la courbe auxiliaire (γ), d'équation

$$z = x \log x. \tag{2}$$

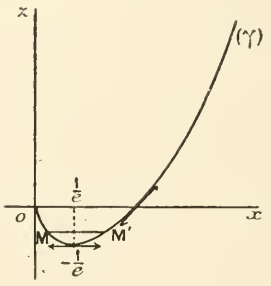
Le Tableau de variation ci-dessous s'établit sans difficulté :

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
z	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La branche infinie est parabolique, dans la direction Oz, car $\frac{z}{x} \to +\infty$, pour $x = +\infty$. La tangente en O est Oz, car $\frac{z}{x} \to -\infty$, pour $x = 0$. La tangente au point $(1, 0)$ est parallèle à la première bissectrice, car $\frac{dz}{dx}$ y prend la valeur 1.

Finalement, notre courbe auxiliaire a la forme suivante (*fig.* 23).

Fig. 23.



Cela posé, tout point de la courbe proposée (C), autre qu'un point de la première bissectrice, doit avoir pour coordonnées les abscisses x et x' de deux points différents, M et M', de la courbe auxiliaire, situés sur une même parallèle à Ox. Or, les seules parallèles à Ox qui rencontrent (γ) en plus d'un point sont celles dont le z est compris entre 0 et $-\frac{1}{e}$. A chacune d'elles correspondent deux points de la courbe (C), symétriques par rapport à la première bissectrice et ayant pour coordonnées respectives (x, x') et (x', x). Considérons seulement le premier de ces

points. On voit que *lorsque* x *croît de* 0 *à* $\frac{1}{e}$, x', *c'est-à-dire* y, *décroît de* 1 *à* $\frac{1}{e}$.

La tangente au point A(0, 1) a pour coefficient angulaire la valeur, en ce point, de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x - 1}{\log y - 1}, \tag{4}$$

valeur qui est égale à $-\infty$. La tangente est donc Oy.

Au point $B\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$, le rapport (4) se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. L'équation ordinaire de la tangente devient illusoire. Il faut employer une méthode spéciale.

Portons l'origine en B :

$$x = \frac{1}{e} + X, \qquad y = \frac{1}{e} + Y.$$

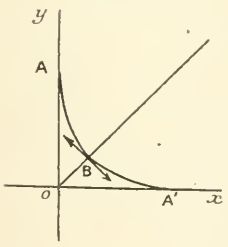
L'équation (1) devient

$$\left(\frac{1}{e} + X\right)[\log(1 + eX) - \log e] = \left(\frac{1}{e} + Y\right)[\log(1 + eY) - \log e]$$

ou

$$X[\log(1 + eX) - 1] - Y[\log(1 + eY) - 1] + \frac{\log(1 + eX) - \log(1 + eY)}{e} = 0. \tag{5}$$

Fig. 24.



Comme nous avons affaire aux petites valeurs de X et de Y, nous pouvons développer suivant les puissances croissantes de ces deux variables. Nous avons, en nous limitant aux termes du second degré,

$$X(eX - 1) - Y(eY - 1) + X - Y - \frac{e}{2}(X^2 - Y^2) + \ldots = 0$$

ou

$$\frac{e}{2}(X^2 - Y^2) + \ldots = 0, \tag{6}$$

les termes non écrits étant du troisième ordre au moins.

En appliquant le théorème du n° 199 (¹), on voit que le point B est un point double, les tangentes en ce point étant parallèles aux bissectrices. La première bissectrice était à prévoir comme tangente, puisqu'elle fait partie de la courbe. Reste la parallèle à la seconde bissectrice, qui est la véritable tangente cherchée. Nous avons finalement la courbe ci-dessus (*fig.* 24). (Unité de longueur : $u = 15^{mm}$.)

Remarque. — La méthode employée pour cette construction peut être appliquée à toute courbe définie par une équation de la forme

$$f(x) = f(y). \tag{7}$$

On construit la courbe auxiliaire $z = f(x)$.

6. *Construire la courbe*

$$(x^2 - 1)(x^3 - y^3) = (y - 1)(x^2 + y^2 - 3). \tag{1}$$

On ne peut songer à discuter cette équation ni par rapport à x, ni par rapport à y. Par contre, la méthode des régions (n° 250) est tout indiquée. Les facteurs des deux membres donnent des droites et un cercle, tracés sur la figure 25, en trait pointillé pour les facteurs de gauche, en trait mixte pour les facteurs de droite.

En substituant le point à l'infini sur Ox, on obtient les signes + à gauche, — à droite. La région correspondante est donc impossible et l'on en déduit toutes les autres.

Nous avons comme asymptote la première bissectrice, la position de la courbe étant donnée par $y - x = -\frac{2}{3x} + \ldots$. Une asymptote, qui compte pour deux (asymptote de rebroussement), est Oy; la position de la courbe est donnée par $x^2 = \frac{1}{y} + \ldots$.

Ces renseignements suffisent pour trouver la forme générale de la courbe. Partons de la branche A. Nous ne pouvons quitter la région que

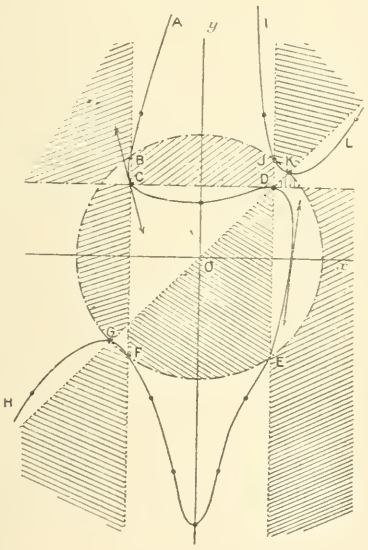
(¹) Ce théorème a été établi pour une courbe algébrique. Mais la démonstration serait encore valable si, au lieu d'un polynome à coefficients constants, on supposait un polynome à coefficients variables, mais finis pour $x = y = 0$.

par le point B (1). Il nous faut ensuite passer par C (2), puis D (tangentiellement à CD), puis E, puis F, puis G et enfin aller à l'infini sur la branche H. Revenons maintenant à la branche I ; elle nous conduit en J, puis en K et enfin à l'infini sur la branche L. Nous avons ainsi toute la courbe.

Pour préciser son tracé, déterminons quelques points supplémentaires. Nous avons d'abord les points sur Oy, qui sont donnés par une équation du second degré et ont pour ordonnées $0,79$ et $-3,79$. Les tangentes en ces points sont parallèles à Ox, car f'_x s'y annule, f'_y restant différent de zéro.

Nous avons ensuite un point sur Ox. Il est donné par une équation du cinquième degré, que l'on résout facilement par des substitutions faites à la règle à calculs. On trouve $x=1,28$; la tangente a pour coefficient angulaire $-8,15$.

Fig. 25.



Nous avons également coupé par la droite $y=2$, qui nous a donné : $x_1=-0,89$; $x_2=+0,87$; $x_3=+2,12$ et par la droite $y=-2$, qui nous a donné : $x_1=-2,31$; $x_2=-0,66$; $x_3=+0,68$. La droite

(1) On ne peut sortir par J, car il faudrait couper Oy plus de deux fois. Or, il ne reste sur cette droite que deux points d'intersection à distance finie (qui sont d'ailleurs calculés plus loin).

(2) La tangente en ce point a pour coefficient angulaire $-\frac{1}{4}$.

$y = -3$ donne à peu près $x_2 = -x_3 = 0{,}30$. La courbe est alors très bien déterminée (*fig.* 25).

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Construire les courbes

$$x = \frac{t^2-1}{t(t^2+1)}, \qquad y = \frac{t^2+3}{t(t^2+1)} \qquad \text{(points d'inflexion)};$$

$$x = \frac{5t^3+4t}{t^2-1}, \qquad y = \frac{5t^2+8t-15}{t^2-1} \qquad \left(\begin{matrix}\text{points d'inflexion}\\ \text{et de rebroussement}\end{matrix}\right);$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2t^3}{1-t}, & y &= \frac{3t^4}{1-t} && \text{(points d'inflexion)}\\ x &= \frac{t-1}{t^4+1}, & y &= \frac{t+1}{t^4+1}\\ x &= \frac{1}{t(t-1)}, & y &= \frac{2t}{t^2-1}\\ x &= \cos 3t, & y &= \sin 2t \end{aligned}\right\} \text{(E. P., 1913)};$$

$$x = \frac{\sin t}{1-\sqrt{2}\cos t}, \qquad y = \frac{\cos t}{1-\sqrt{2}\sin t} \qquad \text{(E. C., 1913)};$$

$$x = \frac{\sin 2t}{1+2\cos t}, \qquad y = \frac{\tang t}{4\sin^2 t - 3};$$

$$x = t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t, \qquad y = 2\operatorname{ch} t;$$

$$x = t + \frac{\cos t(1+\cos^2 t)}{\sin t}, \qquad y = -\frac{2\cos^2 t}{\sin t};$$

$$x = t + 2\cos t, \qquad y = t - \sin 2t;$$

$x = \log\sin^2 t - 2\cos^2 t$, $y = \sin 2t$ (E. P., 1913) (points d'inflexion).

$x = e^{3t}\tang t$, $y = e^{3t}\cot t$ (points d'inflexion).

[Pour calculer les points d'inflexion des trois premières courbes, opérer en coordonnées homogènes (n° 222).

La seconde courbe présente un point de rebroussement, dont le t vérifie l'équation aux t des points d'inflexion.

La quatrième courbe est symétrique par rapport à la seconde bissectrice $(t \mid -t)$.

La septième est symétrique par rapport à la première bissectrice $\left(t \mid \frac{\pi}{2} - t\right)$. L'intervalle de variation réduit se compose des deux intervalles $\left(-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right)$ et $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$.

Pour la onzième, on prendra l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ et l'on complétera par symétrie par rapport au point $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ et par la translation $(2\pi, 2\pi)$.

Pour la treizième, le changement $t \mid t+\pi$ donne une homothétie. Le changement $t \mid t+\frac{\pi}{2}$ donne une homothétie, suivie d'une symétrie par rapport à la seconde bissectrice. Intervalle réduit : $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.]

2. Construire la courbe

$$x = \cos 4t, \qquad y = \sin 3t \qquad \text{(E. P., 1913)}.$$

Construire en entier la courbe algébrique dont cette courbe fait partie. (Exprimer x et y en fonction de $\sin t$.)

3. Construire les courbes

$$x^3(x+y) - xy - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{4} = 0;$$
$$2x^2y^2 + y^3 - 4(x^2+y^2) - 6y = 0;$$
$$xy^2 = ax^2 - by^2 \qquad \text{(E. P., 1913)}.$$

(Équations résolubles.)

4. Construire les courbes

$$\log x \log y = a, \qquad e^x - e^y = a \qquad \text{(E. P., 1911)}.$$
$$\sin x - \cos y + 1 = 0, \qquad \cos^2 x - \cos x = \cos^2 y - \cos y \qquad \text{(E. P., 1913)}.$$

(Équations résolubles. La quatrième se décompose.)

5. Construire les courbes

$$\left.\begin{array}{l} 2\arcsin x = 3\arcsin y \\ \left(\frac{x}{a} - 1\right)^2 + \left(\frac{a}{y} - 1\right)^2 = 1 \end{array}\right\} \text{(E. P., 1913)}.$$

[Pour la première, exprimer x et y en fonction de la valeur commune des deux membres. Pour la seconde, on peut poser $\frac{x}{a} - 1 = \cos t$, $\frac{a}{y} - 1 = \sin t$.]

6. Construire les courbes

$$x^2y + 2x^2 + y^2 - x = 0;$$
$$(x^2 - y^2)(x + 2y) + x(x + y - 1) = 0;$$
$$3x(x^2 - y^2) + 3(x^2 + y^2) - 2xy - 10x + 6y - 8 = 0;$$
$$x^3 + y^3 - y^2 - x - 1 = 0 \qquad \text{(E. P., 1913)};$$
$$(x^2 - 1)(x + 2) = (y^2 - 1)(y - 2);$$
$$x^3 + 2(x^2 + y^2) - (x + y) - 2 = 0;$$
$$x^2(x^2 + y^2) - 4x^2y + 3y^2 = 0 \qquad \text{(E. P., 1913)};$$
$$(x^2 - y^2)^2 + x(x^2 - y^2) + 2x^2 + 3x + 1 = 0;$$
$$x^2(x - 2y)^2 - x^2 - y^2 + xy + 3 = 0;$$
$$(x + y)^3(x - y) - 3xy + x = 0;$$
$$xy^2(x^2 + y^2) - x^3 + x^2 - y^2 = 0;$$
$$2y^5 + 3x^4 - 5xy^2 = 0 \qquad \text{(E. P., 1913)};$$
$$x^3 + y^3 - xy = 0 \qquad \text{(folium de Descartes)}.$$

[Pour la première, discuter par rapport à x, puis par rapport à y. Puis, régionner, en écrivant l'équation

$$x^2(y + 2) = x - y^2$$

ou bien

$$y(x^2 + y) = x(1 - 2x).$$

Pour la seconde, la méthode des régions suffit.

Pour la troisième, discuter par rapport à y.

Pour la quatrième, la méthode des régions suffit, en écrivant l'équation sous l'une des formes

$$y^2(1 - y) = x^3 - x - 1, \qquad x(1 - x^2) = y^3 - y^2 - 1.$$

Les tangentes parallèles à Oy ont pour ordonnées de leurs points de contact $y = 0$ et $y = \frac{2}{3}$; les tangentes parallèles à Ox ont pour abscisses de leurs points de contact $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

La cinquième est symétrique par rapport à la seconde bissectrice. La méthode des régions suffit.

Pour la sixième, méthode des régions en écrivant

$$(x^2 - 1)(x + 2) = y(1 - 2y);$$

ou bien, discussion par rapport à y. On peut aussi résoudre par rapport à x : on aperçoit alors l'axe de symétrie $y = \frac{1}{4}$ et l'on étudie les variations de $\left(y - \frac{1}{4}\right)^2$.

Pour la septième, discuter par rapport à x.

Pour la huitième, méthode des régions, en isolant les termes du second degré ou bien discussion par rapport à y.

Pour la neuvième, résoudre par rapport à y.

Pour la dixième, méthode des régions.

Pour la onzième, discuter par rapport à x. On cherchera, à titre de renseignements complémentaires, les points de rencontre de la courbe avec ses asymptotes.

Pour la douzième, couper par une droite variable passant à l'origine.]

7. Construire la courbe

$$x^4 - y^4 + 2x^3 + y^2 - y - 1 = 0.$$

[On construira très exactement les deux courbes auxiliaires

$$z = x^4 + 2x^3 - 1, \qquad z = y^4 - y^2 - y;$$

puis on les coupera par $z = \text{const.}$; on aura ainsi autant de points qu'on le voudra de la courbe proposée.

Cette méthode est applicable toutes les fois que l'équation peut se mettre sous la forme

$$f(x) = g(y).]$$

8. Construire la courbe

$$2x(x^2 - 2)(x^3 - 2x + 1) + (2y^3 - y - 1)(2y^3 - y - 3) = 0.$$

[On peut appliquer la méthode précédente. Mais, il est plus simple de remarquer que l'équation s'écrit

$$2X^2 + Y^2 - 2X - 2Y = 0, \tag{1}$$

en posant

$$X = x^3 - 2x + 1, \qquad Y = 2y^3 - y - 1. \tag{2}$$

On construit les trois courbes auxiliaires (1) et (2), qui sont très simples et l'on en déduit autant de points qu'on veut de la courbe proposée.

Plus généralement, on peut appliquer cette méthode à toute courbe dont l'équation peut s'écrire

$$f(X, Y) = 0, \qquad X = \varphi(x), \qquad Y = \psi(y), \tag{2}$$

les fonctions f, φ, ψ étant simples.]

9. Étudier la forme de la surface

$$z^2(x^2 + y^2 + z^2) - 2az(x^2 + y^2 + z^2) + a^2(x^2 + z^2) = 0.$$

(Couper par les plans parallèles à xOy, ainsi que par les plans zOx et zOy.)

CHAPITRE XVII.

ÉTUDE DES COURBES PLANES EN COORDONNÉES POLAIRES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Construire la courbe* $\rho = \dfrac{\operatorname{tang}\omega}{1 + 2\cos 2\omega}$.

La plus petite période de ρ est π, ce qui nous indique déjà une symétrie par rapport au pôle. Le changement de ω en $-\omega$ change ρ en $-\rho$: d'où symétrie par rapport à Oy. *L'intervalle de variation est* $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ *et il faudra compléter par les symétries* par rapport à Oy et à O ou, ce qui revient au même, *par rapport à* Ox *et à* Oy.

ρ devient infini pour $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ et pour $\cos 2\omega = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3}$, d'où

$$\omega = \frac{\pi}{3}.$$

Calculons la dérivée $\dfrac{d\rho}{d\omega}$:

$$\rho' = \frac{1 + 2\cos 2\omega - 2\sin^2 2\omega}{\cos^2\omega(1 + 2\cos 2\omega)^2} = \frac{3 - 2\cos 2\omega - 2\cos^2 2\omega}{\cos^2\omega(1 + 2\cos 2\omega)}.$$

Le trinome du second degré en $\cos 2\omega$, qui est au numérateur, admet une seule racine entre -1 et $+1$, qui est $\dfrac{1 - \sqrt{7}}{2}$.

La valeur correspondante de ω est, à 10′ près, 72°40′. Celle de ρ est $\dfrac{\operatorname{tang} 72°\,40'}{2 - \sqrt{7}} = -4{,}97$. D'où le point C (*fig.* 26), où la normale est OC.

Tableau :

ω	0.		$60°$.		$72°40'$.		$90°$.
ρ	0	$-\infty$		$-\infty$	$-4{,}97$		$-\infty$

Asymptotes. — *Direction* $\omega = \dfrac{\pi}{3}$ *ou* OX (*fig.* 26). — La sous-asymptote

est la limite de

$$\delta = \rho \sin\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{tang}\omega \sin\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)}{1 + 2\cos 2\omega} = \operatorname{tang}\omega \frac{\sin\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)}{1 + 2\cos 2\omega}.$$

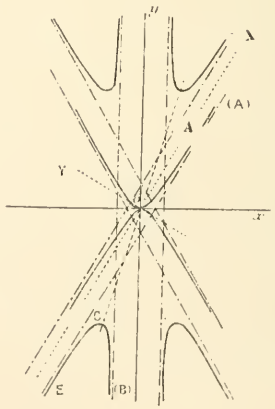
Le premier facteur a pour limite $\operatorname{tang}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Appliquant au second la règle de l'Hospital, on trouve qu'il tend vers $\frac{1}{-4\sin\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Donc, δ tend vers $-\frac{1}{2}$.

Si l'on veut la position de la courbe, il vaut mieux procéder autrement. Posons $\omega - \frac{\pi}{3} = h$. En appliquant les méthodes du Tome I (Chap. VIII), on trouve

$$\delta = -\frac{1}{2} - \frac{5h}{2\sqrt{3}} + \dots$$

La sous-asymptote, qui doit être portée sur OY (*fig.* 26), est donc

Fig. 26.



$-\frac{1}{2}$; de plus, $\delta + \frac{1}{2}$ a le signe contraire à h. D'où l'asymptote (A) et les branches A et E.

Direction $\omega = \frac{\pi}{2}$. — On a

$$\delta = \rho \sin\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) = -\rho\cos\omega = -\frac{\sin\omega}{1 + 2\cos 2\omega} = -1.$$

D'ailleurs, si l'on pose $\omega - \frac{\pi}{2} = h$, on a

$$\delta = -\frac{\cos h}{1 - 2\cos 2h}$$

$$= -\frac{1 - \frac{h^2}{2} + \dots}{1 - 2(1 - 2h^2 + \dots)} = \frac{1 - \frac{h^2}{2} + \dots}{1 - 4h^2 + \dots} = 1 + \frac{7}{2}h^2 + \dots$$

La sous-asymptote est 1 et $\delta - 1$ est positif. D'où l'asymptote et la branche (B).

Nous pouvons maintenant construire la courbe OAECB, que nous complétons ensuite par symétries. (Unité de longueur : $a = 5^{mm}$.)

2. *Construire la courbe* $\rho = \frac{1}{4\sin^2\omega + \sin\omega + 1}$.

La plus petite période de ρ est 2π. Si l'on change ω en $\pi - \omega$, ρ ne change pas; il y a symétrie par rapport à Oy. Nous pouvons nous borner à faire varier ω de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, car $\pi - \omega$ variera de $\frac{3\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, ce qui nous donnera un intervalle total de longueur 2π.

Le trinome du second degré en $\sin\omega$ qui constitue le dénominateur de ρ n'a pas de racines. Donc, ρ n'est jamais infini. On a

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)' = (8\sin\omega + 1)\cos\omega. \tag{1}$$

Cette dérivée a, dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, le signe de $8\sin\omega + 1$, lequel change pour $\sin\omega = -\frac{1}{8}$, $\omega = -8^g$, $\rho = \frac{16}{15}$ (point B, *fig.* 27).

Tableau :

ω	-100^g.	-8^g.	0.	$+100^g$.
ρ	$\frac{1}{4}$	$\frac{16}{15}$	1	$\frac{1}{6}$
S_t	∞	∞	1	∞

Dans ce Tableau, nous indiquons les valeurs de la sous-tangente, déduites de la formule (1).

On pourrait se contenter de ces résultats pour construire approximativement la courbe, en joignant les quatre points A, B, C, D par une ligne admettant les tangentes indiquées (la tangente en C fait 45° avec Ox) (*fig.* 27). Mais, si l'on veut un tracé précis, il est indispensable

de chercher des renseignements supplémentaires. Étudions, par exemple, la concavité de la courbe : il nous faut le signe de $\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)''$ (n° 253). Or

$$\left(\frac{1}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{\rho}\right)'' = 3(3 - 4\sin^2\omega).$$

Comme le rayon vecteur est toujours positif, la courbe est concave vers le pôle tant que l'on a

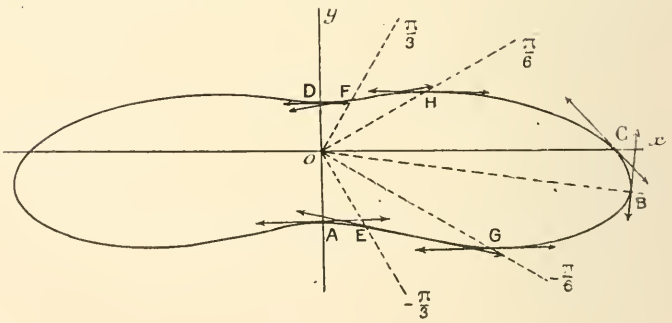
$$\sin^2\omega < \frac{3}{4}.$$

Si l'on se borne à l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, ceci revient à

$$-\frac{\pi}{3} < \omega < \frac{\pi}{3}.$$

En particulier, aux points A et D, la convexité est tournée vers le pôle; en B et C, c'est au contraire la concavité.

Fig. 27.



Pour $\omega = \pm\frac{\pi}{3}$, on a deux points d'inflexion E, F. Leurs rayons vecteurs sont

$$OE = \frac{2}{8 - \sqrt{3}} = 0{,}32 \qquad \text{et} \qquad OF = \frac{2}{8 + \sqrt{3}} = 0{,}21.$$

Les sous-tangentes correspondantes sont $\frac{1}{1 - 4\sqrt{3}}$ et $\frac{2}{1 + 4\sqrt{3}}$, soit $-0{,}34$ et $0{,}25$.

Cherchons encore les points où la tangente est parallèle à Ox. On doit

avoir $\omega + V = k\pi$ ou

$$\operatorname{tang} V = -\operatorname{tang}\omega.$$

Or

$$\cot V = (\log\rho)' = -[\log(4\sin^2\omega + \sin\omega + 1)]' = -\frac{(8\sin\omega + 1)\cos\omega}{4\sin^2\omega + \sin\omega + 1}.$$

On a, dès lors, l'équation

$$\frac{(8\sin\omega + 1)\cos\omega}{4\sin^2\omega + \sin\omega - 1} = \cot\omega.$$

Nous avons d'abord la solution $\cos\omega = 0$, $\omega = \pm\frac{\pi}{2}$, qui nous donne les points A et D déjà obtenus. Puis

$$(8\sin\omega + 1)\sin\omega = 4\sin^2\omega + \sin\omega + 1$$

ou

$$4\sin^2\omega = 1;$$

d'où

$$\sin\omega = \pm\frac{1}{2}, \qquad \omega = \pm\frac{\pi}{6}, \qquad \rho = \begin{cases} \frac{2}{5}, & \text{pour} \quad \frac{\pi}{6}, \\ \frac{2}{3}, & \text{pour} -\frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Les points correspondants sont G et H (*fig.* 27).

Nous pouvons maintenant tracer la courbe AEGBCHFD, avec une grande exactitude; puis, nous complétons par symétrie ($a = 40^{mm}$).

3. *Construire la courbe* $\rho = \sin\frac{2\omega}{3} + 2\cos\frac{\omega}{3}$.

La plus petite période de ρ est 6π.

Si l'on change $\frac{\omega}{3}$ en $\pi - \frac{\omega}{3}$, c'est-à-dire ω en $3\pi - \omega$ et $\frac{2\omega}{3}$ en $2\pi - \frac{2\omega}{3}$, le cosinus et le sinus et, par suite, ρ changent de signe. Cela indique une symétrie par rapport à Ox et nous permet de limiter ω à l'intervalle $\left(-\frac{3\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}\right)$ [1]. On n'aperçoit pas d'autres réductions.

---

[1] $3\pi - \omega$ décrit $\left(\frac{3\pi}{2}, 3\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$, ce qui donne l'intervalle total

$$\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} + 6\pi\right),$$

de longueur 6π.

Étudions la dérivée

$$\rho' = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{2\omega}{3} - \sin\frac{\omega}{3}\right). \tag{1}$$

Cette quantité s'annule pour

$$\cos\frac{2\omega}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{3}\right)$$

ou

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{3} = 2k\pi \pm \frac{2\omega}{3}. \tag{2}$$

Les seules solutions comprises entre $-\frac{3\pi}{2}$ et $+\frac{3\pi}{2}$ sont $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2}$. Lorsque ω croît de $-\frac{3\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, $\rho' > 0$, ρ croît de 0 à $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; quand ω croît de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$, $\rho' < 0$, ρ décroît de $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ à 0.

Ces renseignements suffisent pour donner une idée de l'allure de la courbe et montrer qu'elle possède nécessairement un point double D, dont un angle polaire ω est compris entre $-\pi$ et $-\frac{\pi}{2}$, l'autre étant égal à $\omega + 2\pi$. Pour le déterminer, nous avons à résoudre l'équation (n° 262)

$$\sin\frac{2(\omega + 2\pi)}{3} + 2\cos\frac{\omega + 2\pi}{3} = \sin\frac{2\omega}{3} + 2\cos\frac{\omega}{3}$$

ou, en transformant en produits les différences de sinus et de cosinus et remplaçant $\cos\frac{2(\omega+\pi)}{3}$ par $1 - 2\sin^2\left(\frac{\omega+\pi}{3}\right)$

$$2\sin^2\frac{\omega+\pi}{3} - 2\sin\frac{\omega+\pi}{3} - 1 = 0.$$

La seule racine acceptable est $\frac{\sqrt{3}-1}{2} = 0,366 = \sin 21°28'$. Elle donne, dans l'intervalle $(-270°, +270°)$, $\omega = -115°36'$; puis, $\rho = 0,590$.

Les tangentes aux deux branches de courbe qui passent par D sont obtenues au moyen des deux sous-normales, valeurs de ρ' pour $\omega = -115°36'$ et pour $\omega = +244°24'$; on trouve 0,565 et $-1,293$.

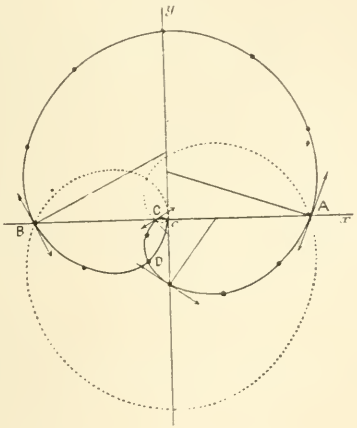
Pour avoir un tracé précis de la courbe, il est indispensable d'en calculer d'autres points que ceux qui sont déjà donnés par l'étude précé-

dente. En faisant un premier tracé approximatif, nous avons estimé utile le calcul des points du Tableau ci-dessous, où nous avons indiqué en même temps les valeurs de la sous-normale ρ', pour le tracé des tangentes :

ω...	-180°	-150°	-90°	-60°	-30°	0	$+30^\circ$	$+60^\circ$	$+90^\circ$	$+120^\circ$	$+150^\circ$	$+180^\circ$	$+210^\circ$
ρ...	134	301	866	1236	1628	2000	2312	2522	2598	2517	2271	1866	1327
ρ'...	244	395	667	739	713	667	511	283	0	-313	-627	-911	-1137

Nota. — Les valeurs de ρ et de ρ' sont données en millièmes (1). La

Fig. 28.



courbe est tracée sur la figure 28. Elle est complétée par symétrie en pointillé ($u = 15^{mm}$).

4. *Construire la courbe*

$$\rho = e^{\omega} + \frac{\omega + 1}{\omega} \tag{1}$$

Il n'y a ni périodicité, ni symétrie et il faut faire varier ω de $-\infty$ à $+\infty$. La dérivée

$$\rho' = e^{\omega} - \frac{1}{\omega^2} \tag{2}$$

(1) Cette approximation est évidemment trop grande pour l'échelle de la figure 28. Mais, si l'on avait à faire un usage pratique de la courbe, il conviendrait de la tracer, sur du papier à dessin, à une échelle beaucoup plus grande, par exemple $u = 100^{mm}$. Les décimales données dans le tableau ne seraient pas surabondantes.

s'annule pour

$$\omega e^{\frac{\omega}{2}} = \pm 1. \tag{3}$$

En étudiant les variations du premier membre, on constate qu'il n'atteint jamais la valeur -1 et atteint $+1$ une seule fois, pour une valeur de ω comprise entre 0 et 1. En utilisant une table de la fonction e^x, on trouve très rapidement (1) $\omega_1 = 0,704 = 44^s,8$; $\rho_1 = 4,44$.

Nous avons le Tableau suivant, pour la variation de ρ :

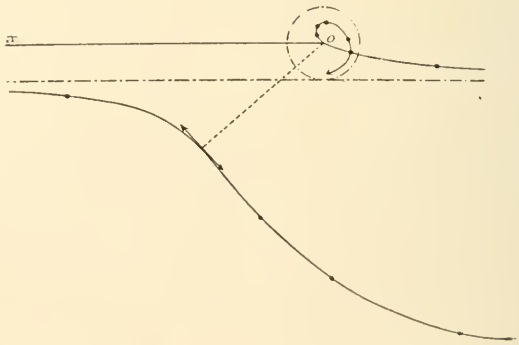
ω	$-\infty$		0		ω_1		$-\infty$
ρ	1	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	ρ_1	↑	$+\infty$

Nous avons à chercher une asymptote parallèle à Ox :

$$\delta = \rho \sin\omega = \left(1 - \frac{\omega^2}{6} + \dots\right)(1 + 2\omega + \dots) = 1 + 2\omega + \dots$$

La sous-asymptote est 1 ; de plus, pour $\omega < 0$, la courbe est à gauche et au-dessous ; pour $\omega > 0$, elle est à droite et au-dessus (*fig.* 29).

Fig. 29.



Pour $\omega = -\infty$, on a $\rho = 1$; on a donc un cercle asymptote (n° 254).

(1) On cherche dans la table un nombre x tel que $e^x = \frac{0,5}{x}$, le second membre étant évalué à la règle. Si l'on ne possède pas de table de la fonction exponentielle, on peut chercher, dans une table de logarithmes, un nombre y tel que

$$\log y = \frac{0,217}{y} \quad \left(y = \frac{1}{\omega}\right).$$

Comme ρ décroît à partir de 1, la courbe part à l'intérieur de ce cercle. Pour les grandes valeurs de $-\omega$, elle est d'ailleurs sensiblement confondue avec la spirale hyperbolique (n° 614) : $\rho\omega = 1$.

Pour $\omega = \pm\infty$, on a une spirale, qui se confond, à la limite, avec la spirale logarithmique (n° 613) $\rho = e^{\omega}$. Voici enfin un Tableau de points supplémentaires :

ω radians..	0.1	0,2	0,4	0.8	1,2	1.6	2	3
ω grades...	6,4	12,7	25.4	50,9	76.4	101,9	127,2	191
ρ.....	12,11	7,22	4,99	4,18	5.16	6,58	8,89	21,42
ω radians..	−0,1	− 0,2	− 0.4	− 0.8	− 1,2	− 1.6	− 2	− 3
ω grades...	−6,4	−12.7	−25.4	−50,9	−76,4	−101,9	−127,2	−191
ρ.....	−8.10	− 3,18	− 0,83	+ 0.20	+ 0,47	− 0,58	− 0,63	+ 0,72

Pour $\omega = 3$, ρ ne diffère du ρ de la spirale logarithmique que de 1,33, soit environ de 6 pour 100. Pour $\omega = -3$, ρ ne diffère du ρ de la spirale hyperbolique que de 0,05, soit environ de 7 pour 100.

La courbe est tracée sur la figure 29 ($a = 7^{mm},5$).

5. *Construire la courbe*

$$\rho^2 \sin\omega - \rho + \cos 2\omega = 0. \tag{1}$$

L'équation admet la période 2π en ω. De plus, si l'on change ω | $\pi - \omega$, elle reste invariante : il y a donc une symétrie par rapport à Oy et l'on peut se borner à faire varier ω de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$.

Discutons par rapport à ρ : la condition de réalité est

$$1 - 4\sin\omega\cos 2\omega \geq 0$$

ou

$$8\sin^3\omega - 4\sin\omega + 1 \leq 0. \tag{2}$$

Le premier membre admet la racine $\frac{1}{2}$ en $\sin\omega$. En divisant par $2\sin\omega - 1$, il reste une équation du second degré, dont les racines sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Finalement, l'inégalité (2) est satisfaite lorsque ω se trouve dans l'un des intervalles $(-54°, +18°)$, $(30°, 90°)$. Pour $\omega = -54°, 18°, 30°$, l'équation (1) a une racine double égale à $\frac{1}{2\sin\omega}$, soit $-0,618$; $1,617$; 1. En chacun de ces points, la courbe est tangente au rayon vecteur.

Le signe de ρ dépend des signes de $\cos 2\omega$ et $\sin\omega$. Il y a du changement pour $\omega = \pm 45^\circ$ et pour $\omega = 0$. Pour $\omega = 0$, une racine devient infinie et l'autre égale à 1. Cherchons l'asymptote qui correspond à la racine infinie. Il nous faut la limite de $\delta = \rho\sin\omega$. Or, δ est lié à ω par l'équation

$$\delta^2 - \delta + \sin\omega\cos 2\omega = 0. \tag{3}$$

Quand ω tend vers zéro, une racine en δ tend vers zéro; elle correspond à la racine finie $\rho = 1$; l'autre racine en δ tend vers 1 et nous donne la sous-asymptote. Cherchons la position de la courbe. A cet effet, posons $\delta = 1 + V$; l'équation (3) se réduit, en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur aux termes gardés, à

$$V + \omega + \ldots = 0.$$

On a donc, au second ordre près,

$$\delta = 1 - \omega + \ldots. \tag{4}$$

Si ω est négatif, la courbe est au-dessus de l'asymptote; d'ailleurs, $\rho = -\infty$; donc, la courbe est à gauche (*fig.* 30). Pour $\omega > 0$, on voit de même que la courbe est au-dessous et à droite.

Cherchons la tangente au point A ($\omega = 0$, $\rho = 1$). Différentions (1) par rapport à ω :

$$2\rho\rho'\sin\omega + \rho^2\cos\omega - \rho' - 2\sin 2\omega = 0. \tag{5}$$

Pour $\omega = 0$, $\rho = 1$, cette équation nous donne $\rho' = 1$. Telle est la valeur de la sous-normale. On en déduit que la tangente en A est parallèle à la première bissectrice.

Occupons-nous maintenant des valeurs $\pm 45^\circ$. Pour chacune d'elles, il y a une racine nulle, donc une branche passant en O, admettant une tangente d'angle polaire ω. L'autre racine est égale à $\frac{1}{\sin\omega}$; le point correspondant est donc sur l'asymptote, car l'équation de celle-ci est $\rho\sin\omega = 1$. Cherchons la tangente. Pour $\omega = \pm 45^\circ$, $\rho = \frac{1}{\sin\omega}$, l'équation (5) nous donne $\rho' = \pm 2 - \sqrt{2}$. La sous-tangente vaut $\frac{\rho^2}{\rho'} = \frac{2}{\sqrt{2} \mp 2}$, c'est-à-dire $-3,41$ et $0,585$. Pour bien guider la courbe, nous avons

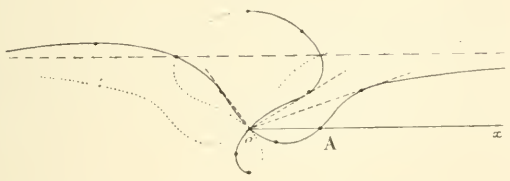
encore coupé par $\omega = -30^\circ$, $\omega = +60^\circ$ et $\omega = +90^\circ$. Les résultats et tous les précédents sont consignés dans le Tableau ci-dessous :

ω	-54°	-45°	-30°	0	18°	30°	45°	60°	90°
ρ_1	$-0,618$	$-\sqrt{2}$	$-2,41$	$-\infty \mid +\infty$	$1,617$	1	$\sqrt{2}$	$1,53$	$1,618$
ρ_2	$-0,618$	0	$0,414$	1	$1,617$	1	0	$-0,38$	$-0,618$
S_{t_1}	0	$+0,585$	$+1,21$	1	0	0	$-3,41$	-7	∞
S_{t_2}	0		$-0,16$	-1	0	0		$+0,14$	∞

d'où la courbe ci-dessous (*fig.* 30), complétée en pointillé par symétrie ($u = 20^{mm}$).

Remarque. — Chaque rayon vecteur coupe la courbe en deux points dont la demi-somme des ρ est $\frac{1}{2\sin\omega}$. Le milieu de ces deux points décrit

Fig. 30.



donc une ligne dont l'équation polaire est $\rho\sin\omega = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire la droite homothétique de l'asymptote dans le rapport $\frac{1}{2}$. En particulier, les points de contact des tangentes issues de O sont tous sur cette droite.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Construire les courbes

$$\rho = \sin 2\omega, \qquad \rho = \sin\omega, \qquad \rho = \frac{1}{\cos 2\omega}, \qquad \rho = \frac{1}{\cos\omega}, \qquad \rho = \operatorname{tang}\omega,$$

$$\rho = \frac{\sin\omega}{1 + 2\cos\omega}, \qquad \rho = \frac{\cos 2\omega}{1 + \cos\omega}, \qquad \rho = \cos\omega + \cos 2\omega,$$

$$\rho = \operatorname{tang}\frac{2\omega}{3}, \qquad \rho = \frac{2\cos^2\frac{\omega}{2} + 2\cos\frac{\omega}{2} + 1}{\cos\omega},$$

$$\rho = \frac{1 + 2\cos\omega}{1 + 2\sin\omega} \quad \text{(points doubles)}.$$

2. Construire les courbes

$$\rho = e^{\tan\frac{\omega}{2}}, \qquad \rho = r^{\frac{1}{\sin\omega}}, \qquad \rho = \frac{1}{\cos(\omega\sqrt{2})}, \qquad \rho = \omega(2\omega^2 - 9\omega + 12)$$

(E. P., 1912 et 1913).

3. Construire les courbes

$$\rho = \operatorname{th}\omega, \qquad \rho = \frac{1}{\operatorname{ch}\omega}, \qquad \rho = \operatorname{ch}\omega, \qquad \rho = \frac{1}{\operatorname{sh}\omega}, \qquad \rho = \operatorname{sh}\omega.$$

4. Construire la courbe définie par les équations paramétriques

$$\omega = t - \frac{1}{\operatorname{th}\frac{t}{2}}, \qquad \rho = \frac{1}{\operatorname{sh} t}.$$

Par un point M quelconque de cette courbe, on mène la symétrique de MO par rapport à la tangente. Elle rencontre la perpendiculaire menée par O à OM en un point P, dont on demande le lieu. (On remarquera que MP est conjuguée harmonique de MO par rapport à la normale et à la tangente. D'où $\frac{2}{OP} = \frac{1}{S_t} + \frac{1}{S_n}$.)

5. Construire les courbes

$$\omega = \rho(\rho+1)(\rho+2); \qquad 2\omega = \rho + \frac{1}{\rho} \qquad \text{(E. P., 1912)}.$$

$$\omega = t - \tan t, \qquad \rho = 2R\cos t.$$

6. Construire les courbes

$$\rho^2\cos\omega - 2\rho\sin\omega - \cos\omega = 0, \qquad \rho^2\sin\omega - 2\rho + \sin\omega = 0.$$

[Chaque équation se décompose, si on la résout par rapport à ρ, en deux équations de la forme

$$\rho = f_1(\omega), \qquad \rho = f_2(\omega). \tag{1}$$

Pour la première courbe, on constate que $f_1(\omega+\pi) \equiv f_2(\omega)$. Les deux équations (1) représentent alors des courbes symétriques l'une de l'autre par rapport au pôle. La courbe proposée se décompose. Pour la deuxième courbe, on a, au contraire, $f_1(\omega+\pi) \equiv -f_2(\omega)$. Les deux équations (1) représentent la même courbe (n° 260).]

7. Construire les courbes

$$\rho^2\cos\omega - 2\rho\sin\omega + \cos\omega = 0, \qquad \rho^2 - 2\rho\cos\omega - 2\sin^2\omega = 0$$

(E, P., 1911 et 1913).

8. Construire la courbe

$$\rho^2 - \rho(2\sin\omega + 1) + \cos\omega + \sin\omega = 0.$$

(On cherchera les points doubles.)

9. Soit la courbe

$$\rho^n = \sin n\omega. \tag{1}$$

1° Calculer l'angle polaire de la tangente en un quelconque de ses points.

2° Combien y a-t-il de tangentes parallèles à une direction donnée? Montrer que les rayons vecteurs aboutissant aux points de contact forment un faisceau régulier.

3° Que peut-on dire des tangentes aux points de rencontre avec une sécante issue du pôle?

10. Soit la courbe $\frac{1}{\rho} = \sin^3\frac{\omega}{3}$.

1° Écrire l'équation de la tangente au point M, d'angle polaire φ.

2° On mène les tangentes MT, M′T′ en deux points M et M′, qui varient de telle manière que l'angle $\widehat{MOM'}$ reste constant et égal à 3A. On appelle t les $\frac{2}{3}$ de l'angle polaire de la bissectrice de cet angle. Calculer, en fonction de t, la tangente de l'angle polaire du point de rencontre P de MT et de M′T′. Étudier les variations de cette tangente.

(Pour 2°, éliminer $\frac{1}{\rho}$ entre les équations des deux tangentes.)

11. Mener à la courbe $\rho = \cos^2\omega$ des tangentes de direction donnée (E. C., 1911). Étudier, quand la direction change, les variations de l'angle formé par les rayons vecteurs de deux des points de contact.

[Si φ désigne l'angle polaire de la direction donnée, on a

$$\operatorname{tang} V = \operatorname{tang}(\varphi - \omega) = \frac{\rho}{\rho'}.]$$

12. On appelle *conchoïde* d'une courbe C une courbe C′ obtenue en prolongeant tous les rayons vecteurs d'une même longueur constante.

Démontrer que les normales aux différentes conchoïdes d'une courbe donnée en tous les points d'un même rayon vecteur sont concourantes.

Que peut-on dire des tangentes aux inverses de ces conchoïdes?

13. Construire les sections de la surface

$$(x^2+y^2+z^2)^3-6x^2-2y^2+2z^2+1=0$$

par les plans $z=0$; $0,2$; $0,4$; $0,6$; $0,8$; 1; $y=0$ et $x=0$.

[Passer en coordonnées polaires. — Cette surface est une *cyclide de Dupin* (n° 581).]

CHAPITRE XVIII.

COURBES ET SURFACES UNICURSALES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Soit la courbe*

$$x^3 = x^2 + y^2. \tag{1}$$

1° *Calculer ses équations paramétriques rationnelles.*

2° *Condition pour que trois points soient en ligne droite; points d'inflexion.*

3° *Condition pour que les tangentes en trois points soient concourantes. Lieu du point de concours, quand ces trois points sont en ligne droite; enveloppe de cette droite.*

4° *Condition pour que six points soient sur une même conique.*

5° *Condition pour que trois points* M_1, M_2, M_3 *soient les points de contact d'une conique tritangente. La droite* M_2M_3 *rencontre la courbe en* P_1; *démontrer que* OP_1 *est perpendiculaire à* OM_1 *et que les trois points* P_1, P_2, P_3 *sont en ligne droite. Calculer les coordonnées du centre de gravité* G *du triangle* $M_1M_2M_3$ *et trouver l'enveloppe de la droite* $P_1P_2P_3$, *quand ce point décrit une droite parallèle à* Oy. *Trouver l'équation générale des coniques tritangentes.*

6° *Montrer qu'il y a trois familles de coniques ayant, avec la courbe, un double contact du second ordre. Pour chaque famille, la droite qui joint les points de contact passe par un point fixe situé sur la courbe.*

7° *Trouver les coniques qui ont, avec la courbe, un contact de cinquième ordre.*

1. Nous avons une cubique à point double, donc unicursale (n° 265). Pour obtenir ses équations paramétriques rationnelles, nous la coupons par une droite variable issue du point double, soit

$$y = tx. \tag{2}$$

Portant dans (1), nous avons, en divisant par x^2,

$$x = 1 + t^2, \qquad y = t + t^3 \tag{3}$$

Telles sont les équations paramétriques demandées.

2° Coupons par une droite quelconque (n° 267)

$$ux + vy + w = 0. \tag{4}$$

L'équation aux t des points d'intersection est

$$u(1 + t^2) + v(t + t^3) + w = 0$$

ou

$$vt^3 + ut^2 + vt + u + w = 0.$$

Ecrivons les relations entre les coefficients et les racines

$$s_1 = -\frac{u}{v}, \qquad s_2 = 1, \qquad s_3 = -\frac{u + w}{v}. \tag{5}$$

La deuxième est indépendante de u, v, w; c'est donc la condition demandée, soit

$$s_2 = 1. \tag{6}$$

Si on la suppose remplie, on tire $\frac{u}{v}$ et $\frac{w}{v}$ des deux autres équations (5), ce qui permet d'écrire l'équation de la droite, en fonction de t_1, t_2, t_3, sous la forme

$$s_1 x - y + s_3 - s_1 = 0. \tag{7}$$

La condition (6) prend une forme élégante, si l'on introduit les angles polaires α_1, α_2, α_3 des trois points considérés. D'après (2), ces angles ont pour tangentes respectives t_1, t_2, t_3. Dès lors, (6) peut s'écrire

$$1 - \operatorname{tang}\alpha_2 \operatorname{tang}\alpha_3 - \operatorname{tang}\alpha_3 \operatorname{tang}\alpha_1 - \operatorname{tang}\alpha_1 \operatorname{tang}\alpha_2 = 0. \tag{8}$$

Or, on a la formule (t. III)

$$\operatorname{tang}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \frac{\operatorname{tang}\alpha_1 + \operatorname{tang}\alpha_2 + \operatorname{tang}\alpha_3 - \operatorname{tang}\alpha_1 \operatorname{tang}\alpha_2 \operatorname{tang}\alpha_3}{1 - \operatorname{tang}\alpha_2 \operatorname{tang}\alpha_3 - \operatorname{tang}\alpha_3 \operatorname{tang}\alpha_1 - \operatorname{tang}\alpha_1 \operatorname{tang}\alpha_2}. \tag{9}$$

La condition (8) équivaut donc à

$$\operatorname{tang}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \infty$$

ou

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{\pi}{2}, \tag{10}$$

à $k\pi$ près.

Les points d'inflexion sont obtenus en faisant, dans (6), $t_1 = t_2 = t_3 = t$, ce qui donne $3t^2 = 1$ ou

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{11}$$

Nous avons donc deux points d'inflexion I et I', symétriques par rapport à Ox [1]. Le premier, par exemple, a pour angle polaire $\frac{\pi}{6}$, pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3\sqrt{3}}\right)$ et pour tangente la droite dont l'équation est obtenue en faisant $t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ dans (7), ce qui donne

$$\sqrt{3}\,x - y - \frac{8}{3\sqrt{3}} = 0. \tag{12}$$

3° Commençons par former l'équation de la tangente au point M, de paramètre t. On pourrait le faire directement, d'après la méthode générale du n° 192. On peut aussi utiliser l'équation (7) en y faisant $t_1 = t_2 = t$ et $t_3 = \frac{1 - t^2}{2t}$, conformément à (6). On obtient, tous calculs faits,

$$(3t^2 + 1)x - 2ty - (t^2 + 1)^2 = 0. \tag{13}$$

Cette équation peut, maintenant, être regardée comme l'équation aux t des points de contact des tangentes issues du point $P(x, y)$. Ordonnons-la [2] :

$$t^4 + (2 - 3x)t^2 + 2ty + 1 - x = 0. \tag{14}$$

Écrivons les relations entre les coefficients et les racines, en mettant en évidence la racine t_4 et désignant toujours par s_1, s_2, s_3 les fonctions symétriques élémentaires de t_1, t_2, t_3 :

$$s_1 + t_4 = 0, \quad s_2 + t_4 s_1 = 2 - 3x, \quad s_3 - t_4 s_2 = -2y, \quad t_4 s_3 = 1 - x. \tag{15}$$

Éliminons maintenant t_4, x et y (n° 267). Nous tirons des deux équa-

[1] Ajoutons qu'il y en a un troisième à l'infini sur Oy, la tangente étant la droite de l'infini.

[2] Elle est du quatrième degré ; donc, la courbe est de quatrième classe (n° 212).

tions extrêmes

$$t_1 = -s_1, \qquad x = 1 + s_1 s_3. \tag{16}$$

Portant dans la deuxième, nous avons la condition demandée

$$s_2 - s_1^2 + 3 s_1 s_3 + 1 = 0. \tag{17}$$

Si on la suppose remplie, les coordonnées du point P sont

$$x = 1 + s_1 s_3, \qquad y = \frac{1}{2}(s_1 s_2 - s_3). \tag{18}$$

Supposons maintenant que les trois points de contact considérés soient en ligne droite. Nous avons, à la fois, (6) et (17). Si nous posons $s_1 = \lambda$, nous tirons de (17), en tenant compte de (6), $s_3 = \dfrac{\lambda^2 - 2}{3\lambda}$. Portant dans (18), il vient

$$x = \frac{1 + \lambda^2}{3}, \qquad y = \frac{1 + \lambda^2}{3\lambda}. \tag{19}$$

Telles sont les équations paramétriques du lieu du point P. Si l'on observe que $\lambda = \dfrac{x}{y}$, on a immédiatement son équation implicite :

$$3xy^2 - x^2 - y^2 = 0. \tag{20}$$

Le lieu est une cubique (¹). Portons maintenant les valeurs de s_1, s_3 dans l'équation (7); nous obtenons l'équation de la droite qui porte nos trois points :

$$3\lambda^2 x - 3\lambda y - 2(1 + \lambda^2) = 0. \tag{21}$$

En écrivant que cette équation admet une racine double en λ (n° 272),

---

(¹) Elle coupe la proposée au point O, qui compte pour six et aux trois points d'inflexion. On le voit aisément en retranchant (20) de (1). Quand P est en I, trois des tangentes issues de ce point se confondent avec la tangente d'inflexion. Les trois points de contact se confondent avec I et sont en ligne droite, sur la tangente. Au reste, on a, dans ce cas, $\lambda = \sqrt{3}$ et il est aisé, dès lors, de vérifier les conclusions précédentes sur les équations (19) et (21).

La tangente d'inflexion est tangente à la parabole (20) au point $\left(\dfrac{4}{9}, -\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\right)$, symétrique de I par rapport au point de rencontre de ladite tangente avec Ox.

nous avons l'équation de l'enveloppe demandée :

$$9y^2 + 8(3x - 2) = 0. \tag{22}$$

L'enveloppe est une parabole (¹).

1° Coupons par une conique quelconque

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{23}$$

L'équation aux t des points d'intersection est

$$(A + 2Bt + Ct^2)(1 - t^2)^2 + 2(D + Et)(1 + t^2) + F = 0$$

ou

$$\begin{aligned} &Ct^6 + 2Bt^5 + (A - 2C)t^4 - 2(2B + E)t^3 \\ &\quad + (C + 2A + 2D)t^2 + 2(B - E)t + A + 2D + F = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Si nous prenons, pour fixer les idées, $C = 2$, les relations entre les coefficients et les racines nous donnent successivement

$$B = -s_1, \qquad A = 2(s_2 - 2), \qquad E = 2s_1 - s_3, \qquad D = 3 + s_4 - 2s_2,$$
$$s_1 - s_3 + s_5 = 0, \qquad F = 2(s_6 - s_2 - s_4 - 1).$$

La cinquième de ces relations, soit

$$s_1 - s_3 + s_5 = 0, \tag{25}$$

est la condition demandée. Les autres nous donnent les coefficients de l'équation (23), qui devient

$$\begin{aligned} &(s_2 - 2)x^2 - s_1xy + y^2 \\ &\quad + (3 + s_4 - 2s_2)x + (2s_1 - s_3)y + s_2 - s_4 + s_6 - 1 = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Observons que la condition (25) peut encore s'interpréter élégamment, par l'introduction des angles polaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ de nos six points. Le premier membre de (25) est, en effet, le numérateur du développement de $\tang(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_6)$ (t. III). Dès lors, la condition équivaut à

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_6 = 0, \tag{27}$$

à $k\pi$ près.

(¹) L'origine est foyer, car l'équation (21) montre de suite que les tangentes issues de ce point, obtenues pour $\lambda = \pm i$, sont isotropes. (n° 514).

5° La conique (26) sera tritangente si les six points considérés précédemment viennent se confondre deux à deux. Par exemple, supposons $\alpha_1 = \alpha_2 = a_1$, $\alpha_3 = \alpha_4 = a_2$, $\alpha_5 = \alpha_6 = a_3$. La condition (27) devient, en rétablissant $k\pi$ au second membre,

$$2(a_1 + a_2 + a_3) = k\pi$$

ou

$$a_1 + a_2 + a_3 = k\frac{\pi}{2}.$$

Si l'on suppose k impair, on retrouve la condition (10); les trois points de contact sont en ligne droite; la conique se réduit nécessairement à une droite double.

Cette solution banale écartée, il nous reste à supposer k pair. Cela nous donne la condition

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0, \tag{28}$$

à $k\pi$ près. Telle est la condition que doivent vérifier les angles polaires des trois points M_1, M_2, M_3 de l'énoncé. Soit β_1 l'angle polaire du point P_1 où la droite M_2M_3 rencontre de nouveau la courbe. D'après (10), nous avons

$$\beta_1 + a_2 + a_3 = \frac{\pi}{2}.$$

En retranchant de (28), on trouve

$$\beta_1 - a_1 = \frac{\pi}{2}. \tag{29}$$

Cela prouve que OP_1 est perpendiculaire à OM_1.

Ajoutons maintenant les trois équations telles que (29); il vient, en tenant compte de (28),

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \frac{3\pi}{2}.$$

On retombe sur la relation (10). Les trois points P_1, P_2, P_3 sont donc en ligne droite (¹).

Si θ_1, θ_2, θ_3 désignent les paramètres de M_1, M_2, M_3, les coordonnées du centre de gravité G sont (n° 23)

$$X = 1 + \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}{3}, \qquad Y = \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}{3} + \frac{\theta_1^3 + \theta_2^3 + \theta_3^3}{3}. \tag{30}$$

(¹) Cela résulte aussi du n° 569.

Soient σ_1, σ_2, σ_3 les fonctions symétriques élémentaires de θ_1, θ_2, θ_3. On a (t. I, n° 224)

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$$
$$\theta_1^3 + \theta_2^3 + \theta_3^3 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2\sigma_1 + 3\sigma_3$$
$$= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

D'autre part, si l'on annule, d'après (28), $\tan(a_1 + a_2 + a_3)$, on trouve, en s'appuyant sur la formule (9),

$$\sigma_1 = \sigma_3. \tag{31}$$

Posons, dès lors, $\sigma_1 = \sigma_3 = \lambda$, $\sigma_2 = \mu$: nous avons

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \lambda^2 - 2\mu, \qquad \theta_1^3 + \theta_2^3 + \theta_3^3 = \lambda^3 - 3\lambda\mu + 3\lambda.$$

Portant dans (30), il vient

$$X = \frac{\lambda^2 - 2\mu + 3}{3}, \qquad Y = \frac{\lambda(\lambda^2 - 3\mu - 4)}{3}. \tag{32}$$

L'équation de la droite $P_1P_2P_3$ nous est donnée par (7), où l'on doit supposer, en vertu de (29),

$$s_1 = -\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_3} = -\frac{\sigma_2}{\sigma_3} = -\frac{\mu}{\lambda}, \qquad s_3 = -\frac{1}{\theta_1\theta_2\theta_3} = -\frac{1}{\sigma_3} = -\frac{1}{\lambda}.$$

On obtient ainsi

$$\mu x + \lambda y - 1 - \mu = 0. \tag{33}$$

Si G décrit une parallèle à Oy, X demeure constant. D'après (32), on a une relation de la forme

$$\mu = \frac{\lambda^2 - k}{2}. \tag{34}$$

Moyennant quoi, (33) devient

$$(\lambda^2 - k)x + 2\lambda y - 2 - \lambda^2 + k = 0.$$

Cette équation étant du second degré en λ, on a immédiatement l'équation de l'enveloppe demandée (n° 272) :

$$y^2 - (x - 1)(kx + 2 - k) = 0. \tag{35}$$

L'enveloppe est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que k est < 0, > 0 ou $= 0$.

Il nous reste maintenant à trouver l'équation de la conique tritangente.

A cet effet, servons-nous de l'équation (26). Il nous faut calculer $s_1, s_2, \ldots, s_6$ en fonction de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. On pourrait le faire directement, en partant des expressions des s_i, écrites tout au long, où l'on ferait ensuite $t_1 = t_2 = \theta_1$, $t_3 = t_4 = \theta_2$, $t_5 = t_6 = \theta_3$. Il est plus simple d'observer que les deux polynomes

$$t^6 - s_1 t^5 + s_2 t^4 - s_3 t^3 + s_4 t^2 - s_5 t + s_6 \quad \text{et} \quad (t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3)^2$$

doivent être identiques. L'identification donne de suite

$$s_1 = 2\sigma_1, \qquad s_2 = \sigma_1^2 + 2\sigma_2, \qquad s_3 = 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3),$$
$$s_4 = \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_3, \qquad s_5 = 2\sigma_2\sigma_3, \qquad s_6 = \sigma_3^2.$$

Si l'on porte dans (25), on obtient l'équation

$$(\sigma_1 - \sigma_3)(1 - \sigma_2) = 0,$$

qui nous redonne des résultats précédemment trouvés.

Si l'on tient compte des notations adoptées tout à l'heure, on a

$$s_1 = 2\lambda, \qquad s_2 = \lambda^2 + 2\mu, \qquad s_3 = 2\lambda(\mu + 1),$$
$$s_4 = \mu^2 + 2\lambda^2, \qquad s_5 = 2\lambda\mu, \qquad s_6 = \lambda^2.$$

Portant dans (26), nous obtenons l'équation demandée :

$$(36) \qquad (\lambda^2 + 2\mu - 2)x^2 - 2\lambda xy + y^2 + (\mu - 1)(\mu - 3)x + 2\lambda(1 - \mu)y - (\mu - 1)^2 = 0.$$

6° Soient α et α' les angles polaires des deux points de contact M et M'. Nous devons satisfaire à (27) en prenant $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ et $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha'$; ce qui nous donne, en rétablissant $k\pi$ au second membre.

$$(37) \qquad \alpha + \alpha' = k\frac{\pi}{3}.$$

Nous avons trois solutions distinctes et trois seulement, obtenues pour $k = 0, 1, 2$.

La solution $k = 0$ nous donne $\alpha' = -\alpha$. Les deux points M et M' sont symétriques par rapport à Ox. La droite MM' passe par le point à l'infini sur Oy, qui est un point d'inflexion de la courbe.

La solution $k = 1$ nous donne $\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{3}$. La droite MM' rencontre la courbe en un point M'', d'angle polaire α'' tel que $\alpha + \alpha' + \alpha'' = \frac{\pi}{2}$,

d'après (10). De là, on tire $\alpha'' = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. Le point M'' n'est donc autre que le point d'inflexion que nous avons désigné, dans 2°, par la lettre I.

On verrait de même que la solution $k = 2$ donne une droite MM' pivotant autour du point d'inflexion I' (*cf.* n° 569).

7° Faisons, dans (27), $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_6 = \alpha$. Nous avons, en rétablissant $k\pi$ au second membre,

$$\alpha = k\frac{\pi}{6}. \tag{38}$$

Il y a six solutions, obtenues pour $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

$k = 0$. — On a $\alpha = 0$, $t = 0$, $x = 1$, $y = 0$; point A. L'équation de la conique se déduit de (26), en y supposant tous les t_i égaux à zéro, donc aussi tous les s_i. On obtient de la sorte l'hyperbole

$$y^2 - (2x - 1)(x - 1) = 0. \tag{39}$$

$k = 1$. — On a $\alpha = \frac{\pi}{6}$; point I. La conique est, *a priori*, la tangente en ce point, considérée comme droite double. On le vérifie en calculant l'équation (26) pour $t_1 = t_2 = \ldots = t_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. On trouve, comme premier membre, le carré du premier membre de (12). Cette solution est banale et sans intérêt.

$k = 2$. — $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $t = \sqrt{3}$, $x = 4$, $y = 4\sqrt{3}$; point B. Ce point n'est pas un point d'inflexion. On doit donc avoir une conique non dégénérée. Pour former son équation, on peut, comme précédemment, utiliser (26). Il est plus simple d'employer (36), en considérant θ_1, θ_2, θ_3 comme confondus avec $\sqrt{3}$, ce qui donne $\lambda = 3\sqrt{3}$, $\mu = 9$. D'où l'équation suivante :

$$43x^2 - 6xy\sqrt{3} + y^2 + 48x - 48y\sqrt{3} - 64 = 0,$$

qui représente une ellipse.

$k = 3$. — $\alpha = \frac{\pi}{2}$; point à l'infini sur Oy. La conique se réduit à la droite de l'infini considérée comme droite double.

$k = 4$ et 5. — Solutions symétriques des solutions $k = 2$ et 1 par rapport à Ox.

2. *Trouver les équations paramétriques rationnelles de la courbe*

$$(x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0. \tag{1}$$

Cette courbe (*lemniscate de Bernoulli*) admet pour points doubles les points cycliques et l'origine. Elle est donc unicursale (n° 265).

Prenons-y un point fixe quelconque, autre que les précédents, soit, par exemple, le point A (1, 0). Coupons la courbe par une conique variable passant par les trois points doubles et le point A, autrement dit par un cercle passant par O et A. Ce cercle a une équation de la forme

$$x^2+y^2 - x - ty = 0. \tag{2}$$

Formons l'équation aux y des points d'intersection. Remplaçant x^2+y^2 par $x+ty$ dans (1), il vient

$$(x+ty)^2 - x^2 + y^2 = 0$$

ou

$$2xty + y^2(t^2+1) = 0.$$

Divisant par y, ce qui ne peut éliminer que les points O et A, nous tirons de là

$$x = -y\frac{(t^2+1)}{2t}. \tag{3}$$

Portons dans (2) :

$$y^2\frac{(t^2+1)^2}{4t^2} + y^2 + y\frac{t^2+1}{2t} - ty = 0.$$

Supprimant encore le facteur y, il vient

$$y = \frac{2t(t^2-1)}{t^4+6t^2+1}. \tag{4}$$

Portant dans (3), nous avons

$$x = \frac{1-t^4}{t^4+6t^2+1}. \tag{5}$$

Les équations (4) et (5) constituent les équations paramétriques demandées.

3. 1° *Montrer que la surface* S

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} = 1 \tag{1}$$

est unicursale. Calculer son degré.

2° *Toute section plane est une quartique unicursale; lieu de ses points doubles.*

3° *Étudier les sections par les plans tangents.*

1° On satisfait identiquement à l'équation (1) en posant

$$x = u^2, \qquad y = v^2, \qquad z = (u - v - 1)^2. \tag{2}$$

La surface est bien unicursale. Au point $M(x, y, z)$, nous ferons correspondre le point $m(u, v)$ d'un plan Ouv. Ce point m sera appelé l'*image* de M.

Pour avoir le degré de S, il suffit de la couper par une droite quelconque. On obtient deux équations de la forme

$$Au^2 + Bv^2 + C(u - v - 1)^2 + D = 0, \tag{3}$$

qui représentent chacune une conique du plan Ouv. Ces deux coniques se coupent en quatre points, tous quatre variables (¹) avec les coefficients A, B, C, D. Donc, la surface S est du quatrième degré (*cf.* Chap. IV, Exercice résolu n° 1).

2° Toute section plane a pour image, dans le plan Ouv, la conique (3). Or, cette conique est unicursale (n° 265). Il en est donc de même de la section puisque, si l'on exprime u et v en fonction rationnelle d'un paramètre t et qu'on porte dans (2), on obtient évidemment des expressions rationnelles.

On sait qu'une quartique plane unicursale possède, en général, trois points doubles (n° 266). Pour obtenir ceux de la section ci-dessus, nous devons chercher un point M qui ait deux images m et m' *distinctes*. Nous devons avoir :

$$u'^2 = u^2, \qquad v'^2 = v^2, \qquad (u' - v' - 1)^2 = (u + v - 1)^2$$

ou

$$u' = \varepsilon u, \qquad v' = \varepsilon' v, \qquad u' + v' - 1 = \varepsilon''(u + v - 1), \tag{4}$$

ε, ε', ε'' désignant ± 1. Voyons les combinaisons possibles pour ces trois doubles signes. On doit d'abord éliminer $\varepsilon = \varepsilon' = +1$, qui ne donnerait pas deux points m et m' distincts.

1. $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = -1$. — La troisième équation (4) devient

$$u - v - 1 = \varepsilon''(u + v - 1).$$

(¹) Les droites doubles représentées par les coefficients de A, B, C, D n'ont aucun point commun.

Si l'on prend $\varepsilon'' = +1$, on a $v = 0$; les deux points m et m' sont encore une fois confondus; cette hypothèse est donc inacceptable. Si l'on prend $\varepsilon'' = -1$, il vient

$$u = 1. \tag{5}$$

Si l'on porte dans (3), on obtient deux valeurs opposées pour v. On trouve donc bien, sur la conique (3), deux points m et m' distincts et donnant le même point M de la section. Ce point est un *premier point double*. Son lieu est défini par l'équation (5), qui donne, en portant dans (2),

$$x = 1, \qquad y = z, \tag{6}$$

c'est-à-dire une droite D.

II. $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = +1$. — On trouve, de même, un *deuxième point double*, défini par $v = 1$, et dont le lieu est la droite D′ :

$$y = 1, \qquad x = z. \tag{7}$$

III. $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = -1$. — Il faut prendre $\varepsilon'' = +1$ et

$$u + v = 0. \tag{8}$$

Cela donne un *troisième point double*, dont le lieu est la droite D″:

$$z = 1, \qquad x = y. \tag{9}$$

En résumé, les trois points doubles de la section par un plan H sont les points de rencontre de ce plan avec les trois droites D, D′, D″, qui sont *trois droites doubles* de la surface. Remarquons que ces trois droites concourent au point $\omega(1, 1, 1)$. Donc, si le plan H passe par ω, les trois points doubles viennent se confondre suivant *le point triple* ω, qui est un *point triple de la surface* (*cf.* Chap. XIII, Exercice proposé n° 18).

3° Si H est tangent, son point de contact est un quatrième point double; donc, la section se décompose (n° 266). D'ailleurs, d'après ce qu'on vient de voir, ce quatrième point double ne saurait avoir deux images distinctes, sans quoi il serait sur l'une des droites D, D′, D″. C'est donc que la conique (3) a elle-même un point double; par suite, elle se décompose en deux droites. A chacune de ces droites correspond une conique sur la surface. L'intersection se compose donc de *deux coniques*.

Les coordonnées (u, v) du point double de (3) doivent satisfaire aux

trois équations dérivées (n° 431) :

$$(10)\qquad \begin{cases} Au + C(u + v - 1) = 0, \\ Bv + C(u + v - 1) = 0, \\ -C(u + v - 1) + D = 0. \end{cases}$$

Si l'on élimine u, v, on a l'*équation tangentielle de la surface*

$$(11)\qquad ABC + D(BC + CA + AB) = 0.$$

On voit que la surface est de *troisième classe*.

En résolvant par rapport à u, v, on a les *paramètres du point de contact*

$$(12)\qquad u = -\frac{D}{A}, \qquad v = -\frac{D}{B};$$

en portant dans (2), on a *ses coordonnées*

$$(13)\qquad x = \frac{D^2}{A^2}, \qquad y = \frac{D^2}{B^2}, \qquad z = \frac{D^2}{C^2}.$$

Cherchons s'il est possible que la conique (3) soit une droite double. Les équations (10) doivent alors se réduire à une seule.

Si $C \neq 0$, les deux premières doivent être vérifiées identiquement quand on y remplace $(u + v - 1)$ par $\frac{D}{C}$; cela exige $A = B = D = 0$. Le plan II est le plan des xy. Il est tangent à S tout le long de la conique Γ'' représentée par l'équation

$$(14)\qquad u + v - 1 = 0$$

et dont l'équation dans xOy est

$$(15)\qquad (x - y)^2 - 2(x + y) + 1 = 0,$$

qui montre que Γ'' est une *parabole tangente à Ox et à Oy*.

Les hypothèses $A \neq 0$ et $B \neq 0$ conduiraient à deux paraboles analogues Γ et Γ' des plans yOz et zOx.

Enfin, l'hypothèse $D \neq 0$ conduit à la conique Γ''' du plan de l'infini, qui a pour image la droite de l'infini du plan Ouv et qui se trouve sur le cône

$$(16)\qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2(yz + zx + xy) = 0.$$

En résumé, *tout plan tangent coupe suivant deux coniques généra-*

lement distinctes. Mais, *il y a quatre plans particuliers, à savoir les plans de coordonnées et le plan de l'infini, qui sont tangents à la surface chacun le long d'une conique.* Ces quatre coniques de contact sont sur une même quadrique, d'équation

$$(17)\qquad x^2+y^2+z^2-2(yz+zx+xy)-2(x+y+z)+1=0.$$

Nota. — La surface que nous venons d'étudier porte le nom de *surface de Steiner*. Elle est la transformée homographique de toute surface non réglée définie par des équations de la forme

$$(18)\qquad x=\frac{f_1}{f_4},\qquad y=\frac{f_2}{f_4},\qquad z=\frac{f_3}{f_4},$$

f_1, f_2, f_3, f_4 désignant quatre polynomes quelconques du second degré en u, v.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Montrer que les courbes des Exercices proposés n^os^ 3 et 4 du Chapitre IV sont unicursales et en trouver les équations paramétriques rationnelles.

2. Montrer que la courbe de l'Exercice proposé n° 5 du même Chapitre est unicursale quand elle est algébrique.

3. Trouver les équations paramétriques rationnelles des courbes

$$x(x^2+y^2)+ax^2+2bxy+cx^2=0,\qquad x^3+y^3=axy,$$
$$x^4+2y^4+x^3+3x^2y+4y^3=0,\qquad x^m+y^m=y^{m-1};$$
$$(x^2+y^2)^2+(\alpha x+\beta y)(x^2+y^2)+ax^2+2bxy+cy^2=0,$$
$$(x^2-y^2-x+1)^2+(x-y)^2(2x-y+1)^2$$
$$+(x-y)(2x-y+1)(x^2-y^2-x+1)=0.$$

4. On considère la strophoïde (S) d'équation

$$(x^2+y^2)(ax+by)-xy=0.$$

1° Trouver ses équations paramétriques rationnelles.

2° Condition pour que trois de ses points soient en ligne droite.

3° La tangente en M coupe la courbe en M_1; la tangente en M_1 coupe la courbe en M_2, et ainsi de suite. Calculer le paramètre du point M_n. Quelle est la position limite de ce point pour n infini ?

4° Conditions pour que les tangentes en quatre points, puis en trois points, soient concourantes.

5° Montrer que, sur la tangente en M, il y a un point P tel que les trois autres tangentes issues de ce point aient leurs points de contact sur une même droite (D). Lieu de ce point et enveloppe de (D) quand M décrit (S).

6° Montrer que les cordes vues de l'origine sous un angle droit passent par un point fixe de la courbe.

7° Condition pour que quatre points de la courbe soient sur un même cercle (C). On suppose que les tangentes en ces quatre points concourent en un même point P. Trouver, dans cette hypothèse, le lieu de P et montrer que le cercle (C) engendre un faisceau.

8° Montrer qu'il y a deux familles de cercles bitangents. Pour chacune d'elles, la corde de contact passe par un point fixe de la courbe, qui est le centre d'un cercle fixe orthogonal à tous les cercles de la famille.

5. Soit la courbe (C) d'équation

$$x^3 + y^3 = ax^2.$$

1° Condition pour que les tangentes en trois points soient concourantes. Condition pour que six points soient sur une conique.

2° Quelle relation géométrique doit exister entre deux points P et P′ pour que les points de contact des tangentes issues de ces deux points soient sur une même conique (S)? Lieu de P′ quand P reste fixe. Montrer que, dans cette hypothèse, la conique (S) passe par quatre points fixes.

3° Trouver les cercles qui coupent (C) en six points dont les tangentes sont tangentes à une même parabole (H). Montrer que toutes les paraboles (H) sont inscrites dans un triangle fixe.

6. On considère la lemniscate de l'Exercice résolu n° 2.

1° Conditions pour que quatre points M_1, M_2, M_3, M_4, donnés par leurs t, soient sur un même cercle ou sur une même droite.

2° Soient C et C′ les centres des cercles OM_1M_2 et OM_3M_4. Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les quatre points soient sur un même cercle est que les droites OC et OC′ soient symétriques par rapport à Ox. Pour qu'ils soient en ligne droite, il faut et il suffit que C′ soit la projection de O sur la polaire de C par rapport à une certaine hyperbole équilatère (H).

3° Lieu (H′) des centres des cercles tangents à la courbe et passant par O.

4° Soit I le centre du cercle tangent en M et passant par O. Pour que les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 soient sur un même cercle (Γ), il faut et il suffit que les quatre points I_1, I_2, I_3, I_4 correspondants soient sur un même cercle (γ). Équation de (γ), connaissant celle de (Γ) et inversement. Pour que (Γ) soit une droite (Δ), il faut et il suffit que (γ) passe à l'origine; (Δ) est alors la polaire du centre de (γ) par rapport à l'hyperbole (H') de 3°.

5° Par tout point M de la lemniscate, on peut mener quatre tangentes autres que la tangente en M (deux seulement sont réelles). Montrer que leurs quatre points de contact sont sur une même droite, qui enveloppe (H') quand M varie, et qui est symétrique, par rapport à O, de la perpendiculaire au milieu de OM.

[Pour 2°, poser $t_1 + t_2 = p$, $t_1 t_2 = q$; calculer p, q en fonction des coordonnées de C; puis s_1, s_2, s_3, s_4 en fonction de p, q, p', q', au moyen du produit $(t^2 - pt + q)(t^2 - p't + q')$.

Pour 4°, calculer les coordonnées de I en fonction du t du point M. Puis, exprimer que I appartient à un cercle quelconque (γ). Comparer l'équation obtenue avec celles de 1°.

Pour 5°, on peut vérifier analytiquement, en se servant de l'équation de la tangente. On peut aussi, plus simplement, trouver une démonstration géométrique, en appliquant les propriétés de 2° à chaque tangente issue de M et utilisant ensuite 4°.]

7. Calculer les équations paramétriques de la courbe

$$y^2 - 2yz - 2zx + xy + x + 2z = 0,$$
$$y^2 + yz + zx + xy + x - y + z + 1 = 0,$$

en posant $y - 2z = t$. Degré de cette courbe.

8. Soit la courbe (C)

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3.$$

1° Trouver les équations du plan qui passe par trois points donnés et de la droite qui joint deux points donnés de cette courbe.

2° Démontrer que, par tout point P de l'espace, on peut mener trois plans osculateurs à (C), les points de contact étant dans un même plan avec P.

3° On considère deux points variables M et M′ qui sont en correspondance homographique et involutive sur la courbe, c'est-à-dire dont les t sont liés par une relation homographique involutive (n° 140). Trouver

le lieu de la corde MM' et celui de la droite d'intersection des plans osculateurs en M et M'.

4° Conditions pour que six points ou cinq points de la courbe soient sur une même sphère. Chercher les sphères tritangentes; lieu de leurs centres; lieu du cercle passant par leurs points de contact; enveloppe de ces sphères.

[Pour 1°, on introduira les fonctions symétriques élémentaires des paramètres des points considérés. Dans l'équation du plan, on posera $t_3 = \theta$, $t_1 + t_2 = p$, $t_1 t_2 = q$; en annulant le coefficient de θ et le terme indépendant, on aura les équations de la droite.]

9. Soit la courbe (C)

$$x = \frac{1}{t^2+1}, \qquad y = \frac{t}{t^2+1}, \qquad z = t.$$

1° Trouver les équations de la sphère qui passe par quatre points donnés et du cercle qui passe par trois points donnés de la courbe. Lieu de ce cercle, quand son plan passe par une droite fixe ou est parallèle à un plan fixe.

2° Équation de la sphère osculatrice au point de paramètre t. Par tout point P de l'espace passent quatre de ces sphères. Lieu de P, pour que les quatre points de contact soient sur une même sphère avec P.

[Utiliser les indications données sur l'exercice précédent.]

10. On considère la courbe définie par les équations

$$x = \frac{(t-\alpha)^3(t-\beta)}{t}, \qquad y = \frac{(t-\beta)^3(t-\alpha)}{t}, \qquad z = t^2.$$

1° Condition pour que quatre points soient dans un même plan.

2° Montrer qu'il y a deux familles de plans bitangents.

3° Le plan osculateur en M coupe la courbe en μ. Montrer que, réciproquement, le plan osculateur en μ passe par M. Prouver que la droite Mμ s'appuie sur deux droites fixes, en deux points conjugués harmoniques par rapport à Mμ. Le lieu du milieu de Mμ est une cubique. Condition pour que cette cubique soit plane. Lieu de la droite Mμ.

4° Montrer que par tout point P de l'espace on peut mener quatre plans osculateurs à la courbe et que les points de contact sont dans un même plan passant par P.

[Pour trouver les droites fixes de 3°, on calculera les coordonnées des

points qui divisent $M\mu$ dans le rapport $\pm \frac{l}{6}$. A propos de 3° et 4°, on vérifiera que les tangentes appartiennent à un complexe linéaire (*cf.* Chap. XIV, Exercice résolu n° 4).]

11. Soit la courbe (C)

$$y = x^3, \qquad z = x^4.$$

1° Condition pour que quatre points soient dans un même plan.

2° Par tout point A de l'espace, on peut mener quatre plans osculateurs, dont les points de contact sont dans un plan passant par A. Le plan osculateur en M coupe la courbe en M'. Montrer que le plan osculateur en M' passe par M et trouver le lieu de MM'.

3° Équation générale des plans bitangents. Soient M et M_1 les deux points de contact de l'un d'eux. Montrer que la droite MM_1 enveloppe une courbe analogue à (C). Montrer que, par la tangente en M, on peut faire passer deux plans bitangents, de points de contact M_1 et M_{-1}. Par la tangente en M_1, on peut mener un second plan bitangent, de point de contact M_2; et ainsi de suite, jusqu'au point M_n. En partant de M_{-1}, on peut obtenir, de même, une autre série de plans bitangents, de points de contact M_{-2}, M_{-3}, ..., M_{-n}. Calculer les coordonnées de M_n et de M_{-n}, en fonction de l'abscisse de M. Trouver les positions limites de ces deux points, pour n infini.

4° Par tout point P de l'espace, on peut mener quatre plans bitangents, dont les huit points de contact se répartissent en deux groupes M, M', M'', M''' et M_1, M'_1, M''_1, M'''_1, tels que les quatre points de chaque groupe soient dans un même plan. On considère les quatre points M_n, M'_n, M''_n, M'''_n, déduits de M, M', M'', M''', comme dans 3°. Montrer qu'ils sont dans un même plan (Q_n) et que les plans bitangents correspondants concourent en un même point P_n. Calculer les coordonnées de P_n et l'équation de (Q_n), en fonction des coordonnées de P. Mêmes questions pour les points M_{-n}, M'_{-n}, M''_{-n}, M'''_{-n}. Montrer que les points P_n et P_{-n} sont tous sur une courbe analogue à la proposée et que les plans (Q_n) et (Q_{-n}) sont tous osculateurs à une courbe analogue à (C). Limites de P_n, P_{-n}, (Q_n), (Q_{-n}), pour n infini.

12. Calculer, par la méthode du n° 270, le degré de la surface de l'Exercice proposé n° 8 du Chapitre IV. Montrer que cette surface est coupée suivant deux courbes unicursales du quatrième degré par la surface

$$2x^2 - 2y^2 - 4z^2 - 2yz + 2zx - 7 = 0$$

13. Calculer le degré de la surface

$$x = u + v + \frac{u}{v} + \frac{v}{u}, \qquad y = 2u - v + 1, \qquad z = \frac{u(u+1)}{v} - v.$$

Montrer que chaque section plane est unicursale. Étudier les sections qui se décomposent.

[Les images des sections planes (*cf.* Exercice résolu n° 3) sont des cubiques ayant cinq points communs. Ces cubiques sont à point double. Elles peuvent se décomposer en une droite et une conique ou bien en trois droites. Le plan sécant est alors tangent ou bien bitangent. Les plans bitangents sont les plans osculateurs d'une cubique gauche.]

CHAPITRE XIX.

THÉORIE DES ENVELOPPES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Soient deux axes rectangulaires* Ox, Oy. *A tout point* M *du plan, on fait correspondre la droite* AB, *qui joint les projections* A *de* M *sur* Ox *et* B *de* M *sur* Oy. *Lorsque* M *décrit une courbe* (C), AB *enveloppe une courbe* (E).

1° *Démontrer que le point de contact de* AB *avec* (E) *se trouve sur la symétrique de la tangente en* M *à* (C) *par rapport à* MA.

2° *Trouver l'équation de* (E), *lorsque* (C) *a une équation de la forme*

$$x^m + y^m = k^m.$$

1° Soient (α, β) les coordonnées de M. L'équation de AB est

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0. \tag{1}$$

Le point de contact P de AB avec l'enveloppe est défini par (1) et par l'équation dérivée par rapport au paramètre t, en fonction duquel sont supposées exprimées α et β :

$$x\frac{\alpha'}{\alpha^2} + y\frac{\beta'}{\beta^2} = 0. \tag{2}$$

D'autre part, la symétrique de la tangente en M à (C) a pour équation

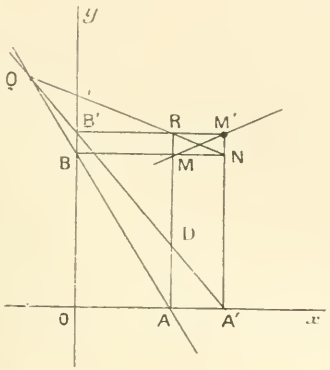
$$\frac{x-\alpha}{\alpha'} + \frac{y-\beta}{\beta'} = 0. \tag{3}$$

Il nous faut vérifier que les trois droites (1), (2), (3) sont concourantes. Pour cela, nous éliminons la variable d'homogénéité entre (1) et (3) et nous devons retrouver (2). C'est ce que le lecteur vérifiera sans aucune peine.

Solution géométrique. — Considérons deux positions voisines M et M'

du point M (*fig.* 31). Les droites AB, A′B′ correspondantes se coupent en un certain point Q. Je dis que ce point se trouve sur la diagonale RN du rectangle MRM′N. Pour le démontrer, appliquons le théorème de

Fig. 31.



Ménélaüs au triangle MAB et aux points N, R, Q. Il faut prouver que

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{NM}} \times \frac{\overline{RM}}{\overline{RA}} \times \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = 1$$

ou, en introduisant le point D où MA rencontre A′B,

$$\frac{\overline{A'O}}{\overline{A'A}} \times \frac{\overline{B'B}}{\overline{B'O}} \times \frac{\overline{DA}}{\overline{B'B}} = 1.$$

Cette égalité résulte évidemment de la similitude des triangles A′DA et A′B′O.

Cela posé, imaginons que M′ tende vers M. La droite MM′ tend vers la tangente en M à (C). La droite RN tend vers la symétrique de cette tangente par rapport à MA. D'autre part, Q tend vers le point de contact de AB avec (E) (n° 273). Comme RN passe constamment par Q, il en est de même à la limite et la proposition de l'énoncé est établie.

2° Il nous faut chercher l'enveloppe de la droite (1), sachant que α et β sont liés par la relation

$$\alpha^m + \beta^m = k^m. \tag{4}$$

Appliquons la règle du n° 278. Nous devons éliminer α et β

entre (1), (4) et

$$\frac{\frac{x}{\alpha^2}}{m\alpha^{m-1}} = \frac{\frac{y}{\beta^2}}{m\beta^{m-1}}$$

ou

$$\frac{\alpha}{\frac{1}{x^{m+1}}} = \frac{\beta}{\frac{1}{y^{m+1}}}. \qquad (5)$$

Appelons ρ la valeur commune des rapports ci-dessus et portons les valeurs de α et de β qu'on en déduit dans (1) et (4); il vient

$$x^{\frac{m}{m+1}} + y^{\frac{m}{m+1}} = \rho,$$
$$\rho^m\left(x^{\frac{m}{m+1}} + y^{\frac{m}{m+1}}\right) = k^m.$$

Éliminant ρ, nous avons l'équation de l'enveloppe

$$\left(x^{\frac{m}{m+1}} + y^{\frac{m}{m+1}}\right)^{m+1} = k^m$$

ou

$$x^{\frac{m}{m+1}} + y^{\frac{m}{m+1}} = k^{\frac{m}{m+1}}. \qquad (6)$$

Comme application, on a *l'enveloppe des segments de longueur k, qui s'appuient sur Ox et Oy*. Il suffit, en effet, de prendre $m = 2$. L'équation (6) devient alors

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}} \qquad (cf.\ \text{n° } 600). \qquad (7)$$

2. *Soit la droite* D

$$tx + (t^3 + \lambda)y - t^2\lambda^2 = 0. \qquad (1)$$

Trouver son enveloppe en y considérant successivement t et λ comme seule variable. Trouver ensuite l'enveloppe de ces enveloppes.

Enveloppes $\lambda = \text{const.}$ — L'équation (1) est du troisième degré par rapport à t. On peut assez aisément exprimer qu'elle a une racine double, en éliminant t entre les deux dérivées. On obtient ainsi l'équation implicite de l'enveloppe, qui est du quatrième degré en x, y et du septième degré en λ. Mais on ne voit guère le moyen d'en tirer parti.

Essayons plutôt de calculer les équations paramétriques de l'enveloppe (n° 272). Pour avoir des calculs simples, divisons (1) par t et dérivons seulement ensuite par rapport à t, de manière à éliminer du même coup x.

Nous pouvons alors calculer y, puis x, en portant dans (1). Ces calculs sont faciles et donnent

$$(2)\qquad x=-\frac{\lambda^2 t(t^3-2\lambda)}{2t^3-\lambda},\qquad y=\frac{\lambda^2 t^2}{2t^3-\lambda}.$$

L'enveloppe E_λ est une courbe unicursale du quatrième degré. Les équations (2) permettraient de la construire aisément, pour toute valeur numérique attribuée à λ. Les dérivées $\frac{\partial x}{\partial t}$ et $\frac{\partial y}{\partial t}$, qui servent pour cette construction (n° 242), sont, en effet [1],

$$(3)\qquad \frac{\partial x}{\partial t}=\frac{2\lambda^2(t^3-\lambda)^2}{(2t^3-\lambda)^2},\qquad \frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{2\lambda^2 t(t^3+\lambda)}{(2t^3-\lambda)^2};$$

l'étude de leur signe est immédiate.

Pour déterminer l'enveloppe des courbes E_λ, appliquons maintenant la méthode du n° 279. On a

$$(4)\qquad \frac{\partial x}{\partial\lambda}=\frac{\lambda t(4t^6-13\lambda t^3-4\lambda^2)}{(2t^3-\lambda)^2},\qquad \frac{\partial y}{\partial\lambda}=\frac{\lambda t^2(4t^3-\lambda)}{(2t^3-\lambda)^2};$$

d'où l'équation

$$(5)\qquad t^2\lambda^3(\lambda-t^3)(8t^3-10\lambda t^3+3\lambda^2)=0.$$

La solution $t=0$ nous donne l'origine comme point limite, solution singulière sans intérêt.

La solution $t^3=-\lambda$ nous donne trois points de rebroussement de E_λ (dont un seul réel), puisque, lorsque cette égalité a lieu, les dérivées $\frac{\partial x}{\partial t}$ et $\frac{\partial y}{\partial t}$ s'annulent toutes deux (n° 202). C'est aussi une solution singulière (n° 275).

Quant au dernier facteur, trinome du second degré en t^3, il s'annule pour $t^3=\frac{\lambda}{2}$ et $t^3=\frac{3}{4}\lambda$.

Pour $t^3=\frac{\lambda}{2}$, x et y sont infinis. Mais la tangente, qui est toujours

---

[1] On peut se borner à faire le calcul de la plus simple, $\frac{\partial y}{\partial t}$, car le rapport $\frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}}$ doit être égal au coefficient angulaire de la tangente (1), c'est-à-dire à $-\frac{t}{t^3-\lambda}$.

donnée par l'équation (1), ne coïncide pas avec la droite de l'infini. Cette dernière ne fait donc pas partie de l'enveloppe et la solution $t^3 = \frac{\lambda}{2}$ est une solution étrangère (1).

Finalement, il ne nous reste plus que la solution

$$t^3 = \frac{3}{4}\lambda, \tag{6}$$

qui va nous donner la véritable enveloppe. En remplaçant, dans (2), λ par $\frac{4}{3}t^3$, nous avons les équations paramétriques de cette enveloppe, soit

$$x = -\frac{40}{9}t^7, \qquad y = \frac{8}{3}t^5. \tag{7}$$

Elles représentent une courbe unicursale du septième degré, que nous laissons au lecteur le soin de construire.

Enveloppes $t = \text{const.}$ — L'équation (1) est du second degré en λ. En écrivant qu'elle a une racine double, nous avons immédiatement l'équation de l'enveloppe E_t

$$y^2 + 4t^3(x + t^2 y) = 0. \tag{8}$$

Nous obtenons une parabole qui passe par trois points fixes, à savoir l'origine et deux points confondus avec le point à l'infini sur Ox. On sait donc, à l'avance, qu'il ne reste sur cette parabole; lorsque t varie, qu'un seul point limite variable. Effectivement, dérivons (8) par rapport à t; nous avons, en divisant par t^2,

$$3x + 5t^2 y = 0. \tag{9}$$

De là, nous tirons x et portons dans (8). Après suppression de la solution singulière $y = 0$, il nous reste $y = \frac{8}{3}t^5$; après quoi, (9) nous donne $x = -\frac{40}{9}t^7$.

Finalement, nous voyons que *l'enveloppe des courbes* E_t *est la même que celle des courbes* E_λ.

---

(1) Elle s'explique par le fait que l'équation (5) a été obtenue en écrivant que les tangentes à E_λ et à son enveloppe avaient même direction. Or, si cela suffit pour la coïncidence de ces deux droites, quand le point de contact est à distance finie, il n'en est pas de même quand il est à l'infini.

Remarque. — On peut se demander si cette coïncidence est purement fortuite ou bien résulte d'une proposition générale. C'est ce dont nous allons essayer de nous rendre compte.

Soit une droite

$$Ax + By + C = 0, \tag{10}$$

dont les coefficients A, B, C sont des fonctions quelconques de deux paramètres indépendants u et v. Si l'on donne à v une valeur constante, elle enveloppe une courbe E_v, définie par (10) et

$$\frac{\partial A}{\partial u}x + \frac{\partial B}{\partial u}y + \frac{\partial C}{\partial u} = 0. \tag{11}$$

Si maintenant v varie, E_v enveloppe une certaine courbe E. Soient M un point limite et T la tangente en ce point. Comme T est tangente à E_v, c'est la droite (10) qui correspond au paramètre v de E_v et au paramètre u de M sur E_v, lequel est une certaine fonction inconnue de v, soit $u = \varphi(v)$. On peut évidemment considérer E comme l'enveloppe de la droite T, c'est-à-dire de la droite (10), quand u et v varient, en étant liés par la fonction φ. Les coordonnées du point M satisfont donc à l'équation

$$\left[\frac{\partial A}{\partial u}\varphi'(v) + \frac{\partial A}{\partial v}\right]x + \left[\frac{\partial B}{\partial u}\varphi'(v) + \frac{\partial B}{\partial v}\right]y + \frac{\partial C}{\partial u}\varphi'(v) + \frac{\partial C}{\partial v} = 0.$$

Mais elles satisfont aussi à (11), puisque M est sur E_v. Dans ces conditions, le coefficient de $\varphi'(v)$ est nul et il reste

$$\frac{\partial A}{\partial v}x + \frac{\partial B}{\partial v}y + \frac{\partial C}{\partial v} = 0. \tag{12}$$

En définitive, les coordonnées du point M doivent vérifier les trois équations linéaires (10), (11), (12), ce qui exige :

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ \frac{\partial A}{\partial u} & \frac{\partial B}{\partial u} & \frac{\partial C}{\partial u} \\ \frac{\partial A}{\partial v} & \frac{\partial B}{\partial v} & \frac{\partial C}{\partial v} \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Cette équation nous définit précisément la fonction inconnue $\varphi(v)$ et l'on peut dire que E *est l'enveloppe de la droite* (10) *quand* u *et* v *varient en étant liés par* (13). On voit que les rôles joués par les deux variables u et v sont à présent symétriques; donc, *la courbe* E *peut être*

indifféremment regardée comme l'enveloppe des courbes E_u *ou* E_v. La coïncidence remarquée tout à l'heure n'était pas fortuite.

Le lecteur retrouvera très facilement les équations (6) et (7) en appliquant l'équation (13) à la droite (1) et cherchant l'enveloppe de cette droite, quand on a (6).

3. *Les axes* $Oxyz$ *étant rectangulaires, on donne une droite* D *parallèle à* Ox *et rencontrant* Oz. *On considère le paraboloïde de révolution* (H) *obtenu en faisant tourner, autour de* Oz, *la parabole de foyer* O *et de directrice* D.

1° *Trouver l'enveloppe* (E) *des sphères* (S) *qui sont tangentes à* D *et ont leur centre sur* (H).

2° *Trouver le lieu du centre des sphères* (S) *dont un point de contact avec* (E) *se trouve dans un plan donné parallèle à* xOy.

3° *Trouver l'enveloppe* (P) *des sphères* (S) *qui passent par un point donné* M *de* Oy. *Trouver l'enveloppe de* (P), *quand* M *décrit* Oy. *Que sont les caractéristiques de cette enveloppe?*

L'équation du paraboloïde (H) est, en appelant a la cote de D,

$$x^2 + y^2 + 2az - a^2 = 0. \tag{1}$$

Si α, β, γ sont les coordonnées du centre ω de (S), on a donc

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\gamma a - a^2 = 0. \tag{2}$$

D'autre part, pour $y = 0$ et $z = a$, le premier membre de l'équation de (S) doit se réduire à $(x - \alpha)^2$. On en conclut immédiatement que cette équation est de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \alpha^2 - a^2 + 2\gamma a = 0 \tag{3}$$

ou, en remplaçant γ par la valeur tirée de (2),

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \frac{\alpha^2 + \beta^2 - a^2}{a} z - \beta^2 = 0. \tag{4}$$

Telle est l'équation générale des sphères (S), en fonction des deux paramètres arbitraires α et β.

1° Dérivons par rapport à ces paramètres (n° 282) :

$$-x + \frac{\alpha z}{a} = 0, \qquad -y + \frac{\beta(z - a)}{a} = 0. \tag{5}$$

De là, nous tirons α et β. En portant ensuite dans (4), nous avons l'équation de l'enveloppe (E)

$$x^2+y^2-z^2-\frac{2ax^2}{z}-\frac{2ay^2}{z-a}+\frac{ax^2}{z}+\frac{ay^2z}{(z-a)^2}-az-\frac{a^2y^2}{(z-a)^2}=0,$$

ou, en chassant les dénominateurs et ordonnant par groupes homogènes,

$$(6)\qquad z^2(x^2+y^2-z^2)-2az(x^2-y^2+z^2)+a^2(x^2+z^2)=0.$$

La surface (E) est une surface du quatrième degré, dont l'étude a été proposée à l'Exercice n° 9 du Chapitre XVI.

2° Les points limites de (S) sont sur la droite définie par les équations (5). Leurs cotes sont obtenues en tirant x et y de ces équations et portant dans (4), ce qui donne, tous calculs faits (1),

$$(7)\qquad (z-a)[\alpha^2z-\beta^2(z-2a)+a^2z]=0.$$

Nous avons d'abord la solution $z=a$, à laquelle correspond le point de contact M de (S) avec D. L'autre point limite N, qui est seul à décrire toute la surface (E), est donné par l'équation (2)

$$(8)\qquad z(\alpha^2+\beta^2-a^2)-2a\beta^2=0.$$

S'il reste dans un plan fixe parallèle à xOy, sa cote z demeure constante. Le centre ω de (S) décrit alors une biquadratique gauche, intersection de (H) avec le cylindre du second degré représenté par l'équation (8), où l'on regarde α et β comme les coordonnées courantes (3).

En tenant compte de (2), cette équation peut aussi s'écrire

$$(9)\qquad \beta^2+(\gamma-a)z=0.$$

D'où il résulte que notre biquadratique se projette sur yOz suivant une parabole d'axe Oz, de sommet A et de paramètre $-\frac{z}{2}$.

3° Si λ désigne l'ordonnée de M, on a, en faisant $x=0$, $y=\lambda$, $z=0$

(1) Ordonner par rapport à α^2 et β^2.

(2) Si l'on tirait z de cette équation et qu'on porte ensuite dans (5), on obtiendrait des équations paramétriques rationnelles de la surface (E), qui est donc unicursale.

(3) Ce cylindre n'est réel que si z est compris entre zéro et $2a$, auquel cas il est hyperbolique.

dans l'équation (4),

$$\lambda^2 - 2\beta\lambda - \beta^2 = 0. \tag{10}$$

Si λ demeure constant, il en est de même de β et l'on peut dire que les sphères (S) qui passent par M se rangent en deux classes, obtenues en remplaçant successivement, dans (4), β par les deux racines de l'équation (10). Nous allons donc, tout simplement, regarder β comme constant dans l'équation (4) et chercher l'enveloppe (P) de (S) dans ces conditions.

Le paramètre α, qui demeure le seul variable, figure au second degré. Nous pouvons donc écrire immédiatement l'équation de notre enveloppe (n° 272) :

$$\alpha^2 x^2 - z\left[\alpha(x^2 + y^2 + z^2 - 2\beta y - \beta^2) - (\beta^2 - a^2)z\right] = 0. \tag{11}$$

Cette surface est une cyclide (n° 582) du troisième degré.

Le cercle caractéristique de (S) est défini par l'équation (4) et par l'équation dérivée par rapport à α, soit

$$\alpha z - ax = 0. \tag{12}$$

Il passe par deux points fixes, situés sur Oy et dont les ordonnées sont les deux racines de l'équation (10) en λ. Ceci était, du reste, à prévoir, puisque la sphère (S) passe constamment par ces deux points, quand β reste constant.

En outre, il s'appuie constamment sur D, car il passe par le point de contact de (S) avec cette droite. Cela nous donne un mode de génération très simple de la cyclide (P).

Cherchons maintenant l'enveloppe de (P), lorsque β varie. L'équation (11) est du second degré par rapport à β. Nous pouvons donc encore écrire immédiatement l'équation de cette enveloppe. Au facteur z près, on retombe sur l'équation (6).

Le facteur z ne correspond pas à une partie de l'enveloppe, car, pour $z = 0$, l'équation (11) se réduit à $x^2 = 0$. Le plan des xy coupe (P) suivant la droite *fixe* Oy. Il lui est d'ailleurs tangent tout le long de cette droite, comme on le constate en transportant l'origine en un point quelconque de Oy.

La véritable enveloppe est *la surface* (E) *de tout à l'heure*. Cela était du reste à prévoir, en vertu du théorème de l'Exercice proposé n° 16.

Pour avoir la courbe caractéristique, dérivons (11) par rapport à β. Après suppression du facteur z, qui correspond à la caractéristique sin-

gulière Oy, il reste

$$\beta(z - a) - ay = 0, \tag{13}$$

qui représente un plan passant par D. La droite D est aussi une caractéristique singulière, car elle fait partie de toutes les surfaces (P), comme nous l'avons remarqué plus haut.

En dehors de D, le plan (13) coupe (P) suivant une conique, qui est nécessairement un cercle, puisque (P) est une cyclide. *Ce cercle est la véritable caractéristique cherchée.*

4. *Déterminer les courbes dont les tangentes s'appuient sur une courbe donnée. Application aux courbes de longueur nulle.*

Soit (C) la courbe donnée. Toute courbe (γ), dont les tangentes s'appuient sur (C), est l'arête de rebroussement d'une développable passant par (C) et dont les plans tangents sont, par conséquent, tangents à (C). Réciproquement, si une développable est l'enveloppe d'une famille de plans tangents à (C), toutes ses génératrices s'appuient sur (C) et son arête de rebroussement fait partie des courbes cherchées. De là résulte la solution suivante :

En chaque point de (C), *on mène un plan tangent quelconque, variant, le long de* (C), *suivant une loi arbitraire. Ce plan enveloppe une développable dont l'arête de rebroussement est la plus générale des courbes demandées.*

Cette méthode peut s'appliquer même dans le cas où la courbe (C) est à l'infini. Le problème revient alors à chercher les *courbes dont les tangentes ont un cône directeur donné.* On les obtient comme arêtes de rebroussement des développables enveloppées par des plans parallèles aux plans tangents à ce cône.

Appliquons ceci à la *recherche des courbes de longueur nulle*, c'est-à-dire à tangentes isotropes (n° 180). Tout plan tangent au cône isotrope de sommet O a une équation de la forme

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \tag{1}$$

avec

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0.$$

Or, on peut satisfaire identiquement à cette dernière condition en prenant

$$\alpha = i(1 - t^2), \qquad \beta = 1 + t^2, \qquad \gamma = 2t.$$

Dès lors, l'équation (1) devient

$$i(1+t^2)x+(1-t^2)y+2tz=0.$$

Une famille quelconque de plans isotropes sera définie par une équation de la forme

$$i(1-t^2)x+(1-t^2)y+2tz=2f(t), \tag{2}$$

où $f(t)$ désigne une fonction arbitraire de t. L'arête de rebroussement de l'enveloppe de cette famille est déterminée par l'équation (2) et les équations dérivées première et seconde, soit

$$t(ix-y)-z=f'(t), \tag{3}$$

$$ix-y=f''(t). \tag{4}$$

Résolvant le système (2), (3), (4) par rapport à x, y, z, nous obtenons les équations paramétriques de la courbe de longueur nulle la plus générale

$$\left\{\begin{aligned} x&=-i\left[f(t)-tf'(t)+\frac{1+t^2}{2}f''(t)\right],\\ y&=f(t)-tf'(t)+\frac{t^2-1}{2}f''(t),\\ z&=-f'(t)+tf''(t). \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Ces équations servent de base à d'importantes recherches de Géométrie supérieure (1).

EXERCICES PROPOSÉS.

1. On considère la droite (U), d'équation

$$u^3(x-a)+3ux-2y=0.$$

1° Enveloppe (C) de cette droite, quand u varie. Calculer son équation. La droite (U) touche (C) en A et la coupe en B; calculer les coordonnées de ces deux points en fonction de u. On montrera que les coordonnées de B se déduisent de celles de A en changeant u en $-\frac{u}{2}$.

2° Soit (V) la droite obtenue pour $u=1$. Pour chaque point P de (V),

(1) *Cf.* DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. I, p. 342.

on peut mener deux tangentes à (C) autres que (V). Soient Q et Q′ leurs points de contact. Connaissant l'abscisse de P, former l'équation de la droite QQ′. Chercher l'enveloppe (E) de cette droite, quand P décrit (V). Distinguer, sur (E), les arcs pour lesquels Q et Q′ sont réels.

(*Bourses de licence*, 1895.)

[Pour ce qui concerne l'enveloppe (E), calculer l'équation de QQ′ en fonction du produit $u_1 u_2 = q$ des paramètres des points Q et Q′.]

2. Étant donnés une involution (M, M′) et un point fixe O, trouver l'enveloppe de la perpendiculaire à OM′ menée par M.

3. Trouver l'enveloppe du cercle ONN′, dans l'Exercice proposé n° 12 du Chapitre V.

4. On donne un cercle et un point A dans son plan. Par ce point, on mène une sécante variable, qui rencontre le cercle en deux points M, M′. Enveloppe du cercle de diamètre MM′. Cas où le point A se trouve sur le cercle donné.

5. Trouver l'enveloppe des cercles (C) de l'Exercice proposé n° 2 du Chapitre XI.

6. Même question pour les cercles de 3°, dans l'Exercice proposé n° 3 du même Chapitre.

7. Étant donnés une ellipse et un point P de son grand axe, on mène, par chaque point M de l'ellipse, la perpendiculaire Δ à PM. Trouver l'enveloppe (A) de cette droite (*antipodaire* de l'ellipse). Montrer que le point de contact est le sommet, opposé à P, d'un rectangle admettant PM pour côté et la normale en M à l'ellipse pour diagonale.

Enveloppe de (A), quand P décrit le grand axe.

[Pour la dernière partie, utiliser la remarque de l'Exercice résolu n° 2. On introduira, comme paramètre, l'anomalie excentrique du point M.]

8. Les axes Oxy étant rectangulaires, on considère le cercle (Γ), de centre O et de rayon R et la courbe (C) définie par l'équation

$$x^m + y^m = k^m.$$

Trouver l'enveloppe des cercles orthogonaux à (Γ) et ayant leur centre sur (C). Cas de $m = 2, \frac{1}{2}, -1, \frac{2}{3}$.

(*Cf.* Exercice résolu n° 1.)

9. Trouver l'enveloppe des courbes $u = \text{const.}$ ou $v = \text{const.}$, définies par les formules

$$x = u^2 + v^2, \qquad y = uv(u + v).$$

10. Soit le plan (H) représenté par l'équation

$$x\cos u + y\sin u + vz + \cos 2u + v^2 = 0.$$

1° Quand u et v varient, (H) enveloppe une surface (Σ). Calculer les coordonnées du point de contact, en fonction de u, v.

2° Lorsque v seul varie, (H) enveloppe un cylindre circonscrit à (Σ) le long d'une parabole (P), section droite du cylindre. Calculer l'équation de ce cylindre. Déterminer et construire l'enveloppe (E) de l'axe de la parabole.

3° Déterminer l'arête de rebroussement de l'enveloppe de (H), quand u seul varie. Montrer que cette arête est une hélice (n° 615) dont le cylindre rectifiant admet (E) pour section droite.

(*Certificat de Mathématiques générales, Clermont-Ferrand*, juin 1914, extrait de la composition écrite.)

11. On reprend les notations de l'Exercice proposé n° 4 du Chapitre XII et l'on demande :

1° L'enveloppe de la sphère (S), quand les points M et M′ sont quelconques;

2° L'enveloppe de la sphère (S), quand les plans (M, D′) et (M′, D) sont rectangulaires;

3° L'enveloppe de la sphère (S), dans les conditions de 5° de l'exercice précité;

4° L'enveloppe de la sphère (S), quand la distance de M′ à D égale la distance de M à D′.

On considère, dans cette hypothèse, le cercle qui a pour diamètre MM′ et qui est orthogonal à D. Trouver l'équation de l'enveloppe de son plan, ainsi que les équations paramétriques de l'arête de rebroussement de cette enveloppe.

12. Étant donné le trièdre trirectangle $Oxyz$, on prend les trois points variables A sur Ox, B sur Oy, C sur Oz. Calculer les équations des enveloppes du plan ABC et de la sphère OABC, en supposant successivement :

1° $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = k$;

2° $\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = l^2$;

3° $\overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OC} = m^3$.

Calculer également l'équation de l'enveloppe de la sphère, en supposant à la fois 1° et 2°.

[Pour cette dernière partie, si l'on pose $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$, on a à éliminer a, b, c entre les équations

$$ax + by + cz = x^2 + y^2 + z^2, \qquad a + b + c = k, \qquad a^2 + b^2 + c^2 = l^2$$

et

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

Pour faire rapidement l'élimination, élever ce déterminant au carré.]

13. Enveloppe des sphères (Σ) et des sphères (S) de l'Exercice proposé n° 16 du Chapitre XII.

14. Vérifier que le cercle défini par les deux équations

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - Rx - Ry\tan\theta - \frac{Rz}{\cos\theta} = 0,$$

$$(2) \qquad x\cos^3\theta + y\sin\theta(1 + \cos^2\theta) + z\sin^2\theta = 0$$

admet une enveloppe (γ) et trouver cette enveloppe.

Calculer les équations des enveloppes de la sphère (1) et du plan (2). Vérifier que ces enveloppes contiennent toutes deux (γ).

15. Si une courbe plane, dont le plan (P) est variable, admet une enveloppe, démontrer que chaque point de contact se trouve sur la caractéristique du plan (P).

16. Étant donnée une surface S dépendant de deux paramètres u et v, on considère l'enveloppe E_v des surfaces pour lesquelles le second paramètre a une valeur donnée v. Montrer que l'enveloppe des enveloppes E_v, quand v varie, n'est autre que l'enveloppe des surfaces S quand u et v varient indépendamment.

[On peut le démontrer analytiquement ou bien géométriquement par la considération des quatre surfaces $S_{u,v}$, $S_{u+du,v}$, $S_{u,v+dv}$, $S_{u+du,v+dv}$.]

17. Déterminer m de manière que la droite définie par les équations

$$t^2 y - mz - 3t - 2 = 0, \qquad 2mt^3 x - 2ty + m = 0$$

ait une enveloppe, quand t varie. Trouver cette enveloppe.

18. Trouver les équations de la courbe la plus générale, dont les tangentes s'appuient sur un cercle donné. (*Cf.* Exercice résolu n° 4.)

19. Même question pour les courbes dont les tangentes font un angle constant avec Oz.

20. Soit la droite

$$Ax + By + C = 0,$$

où A, B, C sont trois fonctions d'un certain paramètre t. Démontrer que les points d'inflexion de l'enveloppe de cette droite sont donnés par l'équation

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0.$$

Étendre ceci à l'arête de rebroussement de l'enveloppe du plan

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

21. On considère une famille de cercles C orthogonaux à une sphère fixe Σ. Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que ces cercles aient une enveloppe E est que leurs axes engendrent une surface développable. Soit D l'arête de rebroussement de cette surface; montrer que les cercles C sont les cercles caractéristiques d'une famille de sphères orthogonales à Σ et admettant D pour courbe déférente. Montrer que la courbe E est anallagmatique par rapport à Σ et que sa corde de contact MM′ avec chaque cercle C est la caractéristique du plan de C. (*Cf.* Exercice n° 15.)

CHAPITRE XX.

COORDONNÉES TANGENTIELLES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *On considère la courbe* (C), *définie par l'équation tangentielle*

$$u^3 + v^3 + uw^2 = 0. \tag{1}$$

1° *Calculer son équation ponctuelle.*

2° *Toute droite* D_0 *la coupe en six points. Les tangentes en ces six points sont tangentes à une même conique* (Γ). *Quelle est l'enveloppe des droites* D_0, *pour lesquelles cette conique est un cercle?*

3° *Trouver les points de rebroussement de la courbe* (C).

4° *Trouver ses asymptotes.*

1° Nous devons éliminer u, v, w entre les équations (n° 293)

$$\frac{3u^2 + w^2}{x} = \frac{3v^2}{y} = 2uw. \tag{2}$$

$$ux + vy + w = 0. \tag{3}$$

Tirons w de la dernière et portons dans les deux autres :

$$3u^2 + (ux - vy)^2 + 2ux(ux + vy) = 0;$$
$$3v^2 + 2uy(ux + vy) = 0.$$

Ces équations sont homogènes et du second degré en u, v. Éliminons ces variables par le résultant (t. I, n° 234) :

$$[9(1 + x^2) - 2xy^3]^2 - 4y^3(3 - x^2)(6x - y^3) = 0.$$

Développons, ordonnons par rapport à y^3 et divisons par 3; il vient, tous calculs faits :

$$4y^6 - 4y^3x(x^2 + 9) + 27(x^2 + 1)^2 = 0. \tag{4}$$

Telle est l'équation ponctuelle de (C). Elle est du sixième degré, conformément à la formule de Plücker (¹) (n° 296).

2° Écrivons que la droite $D_0(u_0, v_0, w_0)$ contient le point de contact de la droite $D(u, v, w)$, point dont les coordonnées sont données par (2); nous avons

$$u_0(3u^2 + w^2) + 3v_0v^2 + 2w_0uw = 0. \tag{5}$$

Les tangentes aux points de rencontre de (C) avec D_0 sont déterminées par le système (1), (5) en u, v, w, système qui admet six solutions, conformément au degré trouvé plus haut pour la courbe. Ces six tangentes, satisfaisant à l'équation (5), qui est du second degré en u, v, w, sont tangentes à une même conique (Γ), dont (5) est l'équation tangentielle.

Voyons si cette conique peut être un cercle. A cet effet (n° 468), procédons à la décomposition de la forme quadratique (5) en carrés, en prenant w pour variable directrice :

$$\frac{1}{u_0}(u_0w + w_0u)^2 + 3u_0u^2 + 3v_0v^2 - \frac{w_0^2}{u_0}u^2 = 0. \tag{6}$$

Égalons les coefficients de u^2 et de v^2 dans la forme quadratique restante :

$$3u_0(u_0 - v_0) - w_0^2 = 0. \tag{7}$$

Si l'on regarde, dans cette équation, u_0, v_0 w_0 comme les coordonnées tangentielles courantes, on a l'équation tangentielle de la courbe que doit envelopper D_0 pour que (Γ) soit un cercle.

Cette équation représente une conique, qu'il est facile d'identifier. Les tangentes en ses points à l'infini sont définies par (7) et par l'équation dérivée par rapport à w_0, soit $w_0 = 0$. Ceci donne $u_0 = 0$, $w_0 = 0$, soit Ox et $u_0 = v_0$, $w_0 = 0$, soit la seconde bissectrice. Notre conique est donc une hyperbole, dont nous avons les asymptotes. Il serait facile de trouver une tangente particulière quelconque et son point de contact.

Si l'équation (7) est vérifiée, l'équation (6) devient

$$(w_0u + u_0w)^2 + 3u_0v_0(u^2 + v^2) = 0. \tag{8}$$

Elle représente un cercle, de centre $\left(\frac{w_0}{u_0}, 0\right)$ et de rayon $\sqrt{-\frac{3v_0}{u_0}}$.

(¹) Il n'y a pas de tangente double, car les trois dérivées partielles, numérateurs de (2), ne peuvent s'annuler simultanément que pour $u = v = w = 0$.

En tenant compte de (7), on trouve aisément que l'équation ponctuelle de ce cercle est de la forme

$$x^2 - y^2 - 2\alpha x + 3 = 0. \tag{9}$$

Il engendre donc un faisceau, d'axe radical Oy.

3° Cherchons les points $M(x, y)$ d'où l'on peut mener à la courbe trois tangentes confondues (n° 300).

L'équation

$$w^3 - v^3 - u(ux + vy)^2 = 0 \tag{10}$$

doit avoir une racine triple en $\frac{v}{u}$. Autrement dit, son premier membre doit être un cube parfait, soit

$$v^3 + u^3 + u(ux - vy)^2 = (v - \lambda u)^3.$$

En identifiant, on trouve

$$y^2 = 3\lambda, \qquad 2xy = 3\lambda^2, \qquad 1 + x^2 = \lambda^3.$$

Des deux premières de ces équations, on tire

$$y = \varepsilon\sqrt{3\lambda}, \qquad x = \frac{\varepsilon\lambda\sqrt{3\lambda}}{2} \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Portant dans la troisième, il vient $\lambda^3 = 4$ ou $\lambda = \sqrt[3]{4}$. Finalement, nous avons deux points de rebroussement R et R', de coordonnées $(\varepsilon\sqrt{3}, \varepsilon\sqrt{3}\,.\,\sqrt[3]{2})$. La tangente en chacun d'eux est donnée par $v = -\lambda u$, $u = -(ux + vy)$. On trouve, sans peine, que son équation est

$$x - \sqrt[3]{4}\,y + \varepsilon\sqrt{3} = 0.$$

4° D'après les formules (2), les asymptotes sont données par $uw = 0$.

I. $u = 0$. — En portant dans (1), on trouve $v = 0$. Cela nous donne la droite de l'infini. Le point de contact a pour coordonnées homogènes $(1, 0, 0)$, toujours d'après (2). C'est le point à l'infini sur Ox. Nous avons donc une branche parabolique dans la direction Ox.

II. $w = 0$. — En portant dans (1), on trouve, en ne s'occupant que du réel, $v = -u$. Ceci nous donne comme asymptote la première bissectrice.

2. *On donne la surface* (S), *d'équation tangentielle*

$$uvw + r(u^2 + v^2 + w^2) = 0. \tag{1}$$

1° *Montrer qu'elle admet pour axes de symétrie les axes de coordonnées et pour plans de symétrie les plans bissecteurs des plans de coordonnées.*

2° *Chercher les sections de la surface par les plans de coordonnées et montrer que chacun de ceux-ci coupe la surface à* 45°.

3° *Section de la surface par le plan*

$$x + y + z + \frac{1}{2} = 0. \tag{2}$$

1° Si, dans l'équation

$$ux + vy + wz + r = 0, \tag{3}$$

on change y en $-y$ et z en $-z$, cela équivaut à changer v en $-v$ et w en $-w$ ou bien, si l'on veut, u en $-u$ et r en $-r$. Or, aucun de ces changements n'influe sur l'équation (1). Il s'ensuit que les plans tangents de la surface (S) sont deux à deux symétriques par rapport à Ox. Cette droite est donc un axe de symétrie pour ladite surface. Un raisonnement analogue montrerait qu'il en est de même pour Oy et Oz.

Pour vérifier la symétrie par rapport au premier bissecteur des plans zOx et zOy, il suffit de remarquer que le changement de x en y et de y en x, dans l'équation (3), équivaut à l'échange de u et de v et que cet échange laisse invariante l'équation (1). Pour le second bissecteur, on changera, de même, u en $-v$ et v en $-u$.

Pour les bissecteurs des autres dièdres, vérifications analogues.

2° Coupons par le plan des xy. Les plans tangents aux points de la section sont caractérisés par l'équation

$$uv + 2wr = 0, \tag{4}$$

obtenue en dérivant (1) par rapport à w (n° 307).

Si nous éliminons maintenant w entre (1) et (4), nous obtenons l'équation tangentielle de la section :

$$u^2v^2 - 4r^2(u^2 + v^2) = 0. \tag{5}$$

On pourrait, à présent, passer à l'équation ponctuelle. Mais, il est préférable d'interpréter géométriquement l'équation (5). Si on la divise

par $4u^2v^2$, elle s'écrit

$$\frac{r^2}{u^2}+\frac{r^2}{v^2}=\frac{1}{4}. \tag{6}$$

Or, $-\frac{r}{u}$ et $-\frac{r}{v}$ sont les segments interceptés sur les axes Ox et Oy, à partir de l'origine, par la droite (u, v, r) du plan des xy. Dès lors, l'équation (6) exprime que le segment intercepté par Ox et Oy sur cette droite a une longueur constante égale à $\frac{1}{2}$. On en conclut (n° 600) que l'enveloppe de ladite droite, c'est-à-dire la section cherchée, est une hypocycloïde à quatre rebroussements.

Prouvons maintenant que les plans tangents à (S) le long de cette section font 45° avec xOy, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ou

$$u^2+v^2-w^2=0.$$

Or, cette équation résulte de l'élimination de r entre (1) et (4). La propriété est donc démontrée.

Les sections par yOz et zOx donneraient lieu à des considérations analogues.

3° Les plans tangents qui ont leur point de contact dans le plan (2) satisfont à l'équation

$$(vw+2ur)+(wu+2vr)+(uv+2wr)+\frac{1}{2}(u^2-v^2+w^2)=0$$

ou

$$(u+v+w)^2+4r(u+v+w)=0. \tag{7}$$

Cette équation se décompose en deux :

$$u+v+w=0, \tag{8}$$

$$u+v+w+4r=0. \tag{9}$$

La première est l'équation tangentielle du point à l'infini dans la direction (1, 1, 1), qui est la direction perpendiculaire à notre plan sécant. La seconde est l'équation tangentielle du point $\Lambda\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Il suit de là que la section cherchée se décompose en deux courbes de troisième classe (γ) et (γ'), qui sont les courbes de contact de (S) avec

le cylindre circonscrit dont les génératrices sont perpendiculaires au plan sécant et avec le cône circonscrit de sommet A.

3. *Montrer que le degré d'une surface développable est égal à la classe de son arête de rebroussement.*

Soient la courbe (C) et la développable (Δ) engendrée par ses tangentes. Le degré de (Δ) est égal au nombre de points de rencontre de cette surface avec une droite quelconque D de l'espace. Or, par chacun de ces points passe une génératrice de (Δ), c'est-à-dire une tangente T à (C). On en déduit un plan tangent à (C) passant par D, à savoir le plan (D, T).

Réciproquement, si l'on considère un tel plan tangent, la tangente à (C) en son point de contact s'appuie sur D, en un point qui appartient à l'intersection de D avec (Δ).

On conclut de là que le nombre des points de rencontre de D avec (Δ) égale le nombre des plans tangents à (C) menés par D; c'est-à-dire que le degré de (Δ) égale la classe de (C).

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Calculer les équations ponctuelles des courbes définies par les équations tangentielles

(1) $$v^2(u+w)-w^3=0,$$

(2) $$u^3+vw(u+v)=0,$$

(3) $$u^3+v(uv-w^2)=0.$$

Vérifier, sur les résultats obtenus, la formule de Plücker (n° 296).

2. Soit la courbe (C), définie par l'équation tangentielle

$$u^3+v^3+w^3=0.$$

Résoudre, pour elle, les questions de l'Exercice résolu n° 1.

3. Soit la courbe (C), définie par l'équation tangentielle

(1) $$(u^2+v^2)uv+w^2(u^2-v^2)=0.$$

1° Montrer qu'elle se superpose à elle-même, quand on la fait tourner d'un angle droit autour de l'origine.

2° Montrer qu'elle est circonscrite à une infinité de carrés, qui ont

pour centre l'origine et dont on cherchera le lieu des sommets. Les quatre points de contact avec chaque carré (Γ) sont les sommets d'un autre carré (γ), qui se déduit de (Γ) par une rotation d'un certain angle $\theta - \frac{\pi}{4}$, suivie d'une homothétie de rapport k. Calculer $\tan\theta$ et k en fonction du côté $2a$ de (Γ). Étudier les variations de ces deux quantités, quand a croît de 0 à $+\infty$.

3° Montrer que chaque cercle de centre O coupe (C) en 20 points, dont 4 sont les points cycliques comptés deux fois. Les 16 autres sont les sommets de quatre carrés, dont on discutera la réalité.

4° Trouver les points de rebroussement de (C), ses points de rencontre avec les axes, ses asymptotes. Construire la courbe, d'après ces renseignements et ceux des parties précédentes.

[Pour 1°, changer u en $-v$ et v en u.

Pour 2°, on a

$$a^2(u^2+v^2)=w^2, \qquad a^2(u^2-v^2)-uv=0. \tag{2}$$

Puis,

$$\tan\theta = \frac{\frac{y}{x}-\frac{v}{u}}{1+\frac{yv}{xu}} = \frac{uy-vx}{ux+vy} = \frac{vx-uy}{w}.$$

En remplaçant x et y par leurs valeurs en fonction de u, v, w et tenant compte de (2), on trouve

$$\tan\theta = -\frac{1+4a^2}{2a^2}.$$

Pour 3°, éliminer w^2. L'équation est divisible par u^2-v^2; puis, devient homogène en u^2-v^2, uv. On obtient une équation du quatrième degré en $\frac{uv}{u^2-v^2}$ et l'on est ramené aux formules (2).

Pour la recherche des points de rebroussement, on prendra pour inconnues les coordonnées x, y d'un de ces points et le coefficient angulaire m de la tangente correspondante. En appliquant la méthode du n° 300 et éliminant x, y entre les trois équations obtenues, on arrive à une équation réciproque en m^2. Si l'on pose $\theta = m^2 + \frac{1}{m^2}$, on trouve une équation du troisième degré en θ, admettant la racine $\theta = 2$, à laquelle correspondent les points à l'infini sur les bissectrices. Il reste ensuite deux racines, qui donnent huit points de rebroussement, sommets

de deux carrés, dont un seul est réel et n'est autre que le carré (γ) de 2°, de côté minimum.]

4. Trouver les équations ponctuelles des surfaces définies par les équations tangentielles

$$u^m + v^m + w^m + r^m = 0,$$
$$uvw + r^3 = 0.$$

5. Soit la surface définie par l'équation tangentielle

$$u(u^2 - v^2 - w^2) - rvw = 0.$$

1° Trouver et construire les sections de cette surface par les plans xOy et xOz. Montrer que, le long de chacune d'elles, la surface fait 45° avec le plan sécant. Montrer également que la développable circonscrite à la surface le long de la section par xOz, par exemple, coupe yOz suivant une courbe égale à cette section et xOy suivant une hypocycloïde à quatre rebroussements.

2° Montrer que chacun des plans $x = \pm 2$ coupe la surface suivant deux courbes de troisième classe, dont on cherchera les équations tangentielles et ponctuelles et que l'on construira. Chacune de ces courbes est la courbe de contact de la surface avec un cylindre circonscrit.

6. De la théorie des divisions homographiques, déduire corrélativement celles des faisceaux homographiques de droites et de plans.

7. Vérifier que l'Exercice proposé n° 28 du Chapitre IX est corrélatif de l'Exercice résolu n° 3 du même Chapitre.

8. Énoncer et démontrer les propriétés corrélatives des propriétés qui font l'objet des Exercices proposés n^{os} 36, 42 et 43 du Chapitre IX.

9. Établir les formules du changement de coordonnées en coordonnées tangentielles.

$$[u' = au + bv + cw, \qquad v' = a'u + b'v + c'w,$$
$$w' = a''u + b''v + c''w, \qquad r' = ux_0 + vy_0 + wz_0 + r].$$

CHAPITRE XXI.

COURBURE DES COURBES PLANES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Soit une courbe quelconque* (C). *Sur la tangente en* M, *on porte une longueur constante* $\overline{MP} = l$. *Démontrer que la normale au lieu du point* P *passe par le centre de courbure de* (C).

Soient x, y les coordonnées de M et α l'angle polaire de la demi-tangente positive. Les coordonnées du point P sont

$$x' = x + l\cos\alpha, \qquad y' = y + l\sin\alpha. \tag{1}$$

L'équation de la normale, en P, au lieu de ce point est

$$(X - x')\,dx' + (Y - y')\,dy' = 0.$$

Pour que cette normale passe par le centre de courbure M_1, il faut et il suffit qu'on ait

$$(x_1 - x')\,dx' + (y_1 - y')\,dy' = 0. \tag{2}$$

Or, on a (n° 311)

$$x_1 - x' = -R\sin\alpha - l\cos\alpha, \qquad y_1 - y' = R\cos\alpha - l\sin\alpha;$$
$$\frac{dx'}{d\alpha} = R\cos\alpha - l\sin\alpha, \qquad \frac{dy'}{d\alpha} = R\sin\alpha + l\cos\alpha.$$

En portant dans (2), on obtient visiblement une identité.

2. *On donne la courbe* (C) *définie par les équations paramétriques*

$$x = t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t, \qquad y = 2\operatorname{ch} t. \tag{1}$$

1° *Calculer le rayon de courbure en* M. *Montrer que si* M_1, N *et* T *désignent respectivement le centre de courbure, le point de rencontre de la normale avec* Ox *et le point de rencontre de la tangente avec le*

même axe, on a

$$\overline{MT}^2 = \overline{MM_1} \cdot \overline{MN}. \tag{2}$$

2° *Calculer les équations paramétriques de la développée et des développantes.*

1° On a

$$\frac{dx}{dt} = -2\,\mathrm{sh}^2 t, \qquad \frac{dy}{dt} = 2\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t; \tag{3}$$

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 4\,\mathrm{sh}^2 t\,\mathrm{ch}^2 t;$$

d'où, en orientant la courbe dans le sens où $|t|$ croît,

$$\frac{ds}{dt} = 2\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t. \tag{4}$$

On a ensuite

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = -\mathrm{th}\,t, \qquad \sin\alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,t}. \tag{5}$$

Différentions la première formule, en tenant compte de la seconde :

$$\frac{d\alpha}{\mathrm{ch}\,t} = \frac{dt}{\mathrm{ch}^2 t}$$

ou

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,t}. \tag{6}$$

En combinant avec (4), nous avons enfin

$$\mathrm{R} = \frac{ds}{d\alpha} = 2\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}^2 t. \tag{7}$$

Calculons $\overline{MN} = u$. L'ordonnée du point N est

$$y + u\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = y + u\cos\alpha = 2\,\mathrm{ch}\,t - u\,\mathrm{th}\,t.$$

Comme elle doit être nulle, on a

$$u = \frac{2\,\mathrm{ch}^2 t}{\mathrm{sh}\,t}. \tag{8}$$

Calculons $\overline{MT} = v$. L'ordonnée du point T est

$$y + v\sin\alpha = 2\,\mathrm{ch}\,t + \frac{v}{\mathrm{ch}\,t}.$$

En l'annulant, on trouve

$$c = -2\operatorname{ch}^2 t. \tag{9}$$

Nous avons à vérifier la formule

$$c^2 = \mathrm{R}u. \tag{10}$$

Cela est évident, si l'on se sert de (7), (8), (9).

On peut déduire, de la formule (2), une construction élégante du centre de courbure : On prend le symétrique, par rapport à M, du point de rencontre de MN avec la parallèle à Oy menée par T.

2° Les coordonnées du centre de courbure sont, d'après (5) et (7),

$$x_1 = x - 2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = t - 3\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t,$$
$$y_1 = y - 2\operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch} t = 2\operatorname{ch} t(1 - \operatorname{sh}^2 t) = 4\operatorname{ch} t - 2\operatorname{ch}^3 t.$$

Telles sont les équations paramétriques de la développée.

Pour avoir les développantes, intégrons (4) :

$$s = \operatorname{sh}^2 t.$$

Dès lors, les équations d'une développante quelconque sont

$$\mathrm{X} = x + (l + \operatorname{sh}^2 t)\operatorname{th} t = t + (l - 1)\operatorname{th} t,$$
$$\mathrm{Y} = y - (l + \operatorname{sh}^2 t)\frac{1}{\operatorname{ch} t} = \operatorname{ch} t + \frac{1 - l}{\operatorname{ch} t}.$$

Pour $l = 1$, on a $\mathrm{Y} = \operatorname{ch}\mathrm{X}$; donc, parmi les développantes, se trouve une chaînette (n° 609); autrement dit, *la courbe proposée est une développée de chaînette.*

3. *Calculer le rayon de courbure et la développée de la sinusoïde.*

Soit

$$y = \sin x. \tag{1}$$

L'application de la formule (13) du n° 313 donne

$$|\mathrm{R}| = \frac{(1 + \cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}{|\sin x|}. \tag{2}$$

Lorsque x croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, R décroît de ∞ à 1.

Pour trouver la développée, partons de l'équation de la normale

$$X - x + (Y - y)\cos x = 0$$

ou

$$X + Y\cos x = x + \sin x \cos x. \tag{3}$$

Dérivons par rapport à x :

$$-Y\sin x = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x. \tag{4}$$

De (4), nous tirons Y ; portant dans (3), nous avons X. Finalement, les équations paramétriques de notre développée sont

$$X = x + \frac{(1+\cos^2 x)\cos x}{\sin x}, \qquad Y = -\frac{2\cos^2 x}{\sin x}. \tag{5}$$

Sa construction a été proposée à l'Exercice n° 1 du Chapitre XVI.

4. *On considère la cissoïde* (n° 570) *définie par les équations paramétriques*

$$x = \frac{t^2}{t^2+1}, \qquad y = \frac{t^3}{t^2+1}. \tag{1}$$

Calculer l'équation du cercle osculateur au point M, *de paramètre* θ. *En déduire les coordonnées du centre de courbure et l'équation de la développée.*

Coupons par un cercle quelconque

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0. \tag{2}$$

L'équation aux t des points d'intersection est, tous calculs faits,

$$t^6 - 2\beta t^3 + (\gamma - 2\alpha)t^2 + \gamma = 0. \tag{3}$$

Écrivons qu'elle a une racine triple égale à θ et une racine simple égale à θ'. Pour cela, nous identifions l'équation (4) avec la suivante :

$$(t^3 - 3t^2\theta + 3t\theta^2 - \theta^3)(t - \theta') = 0. \tag{4}$$

Cela nous donne

$$2\beta = \theta' + 3\theta, \quad \gamma - 2\alpha = 3\theta\theta' + 3\theta^2, \quad 3\theta' + \theta = 0, \quad \gamma = \theta^3\theta'. \tag{5}$$

On en tire $\theta' = -\frac{\theta}{3}$; puis

$$\beta = \frac{4\theta}{3}, \qquad \gamma = -\frac{\theta^4}{3}, \qquad \alpha = -\frac{\theta^2}{6}(\theta^2+6). \tag{6}$$

Portant dans (2), nous avons l'équation du cercle osculateur en M :

$$(7) \qquad x^2 + y^2 + \frac{\theta^2(\theta^2+6)}{3}x - \frac{8\theta}{3}y - \frac{\theta^4}{3} = 0.$$

Quant au centre de courbure, ses coordonnées α et β sont données par (6). Si, entre elles, on élimine θ, on obtient l'équation de la développée :

$$(8) \qquad \alpha = -\frac{9\beta^2}{16} - \frac{27\beta^4}{2^9}.$$

La développée est donc une courbe du quatrième degré, que nous laissons au lecteur le soin de construire.

5. *Calculer le rayon de courbure du folium de Descartes en son point double. Trouver l'intersection de la courbe avec les cercles de courbure en ce point.*

Le folium de Descartes a pour équation (Chap. XVI, Exercice proposé n° 6)

$$(1) \qquad x^3 + y^3 - xy = 0.$$

Deux branches passent à l'origine, tangentiellement aux axes de coordonnées. Elles sont d'ailleurs symétriques par rapport à la première bissectrice. Nous pouvons donc n'étudier, par exemple, que la branche tangente à Ox.

Première méthode. — Appliquons la formule (3) du n° 313. En remarquant que $y' = 0$, on a $R = \frac{1}{|y''|}$. Calculons y''. A cet effet, dérivons (1) deux fois par rapport à x :

$$(2) \qquad 3x^2 + 3y^2y' - y - xy' = 0,$$

$$(3) \qquad 6x - 6xyy'^2 + 3y^2y'' - 2y' - xy'' = 0.$$

Il nous faut la limite de y'' quand $M(x, y)$ tend vers O sur la branche tangente à Ox. Remarquons que $\frac{y}{x}$ et y' tendent vers zéro. Dès lors, si l'on divise (3) par x et qu'on passe à la limite, on a

$$(4) \qquad 6 - 2\lim\frac{y'}{x} = y''_0.$$

Cherchons la limite de $\frac{y'}{x}$. De (2), on tire

$$\frac{y'}{x} = 3 + \frac{3y^2}{x^2}y' - \frac{y}{x^2} = 3 + \frac{3y^2}{x^2}y' - 1 - \frac{y^3}{x^3};$$

d'où

$$\lim \frac{y'}{x} = 2.$$

Portant dans (4), nous avons $y''_0 = 2$, $R = \frac{1}{2}$.

La courbe est concave vers les y positifs; donc, le centre de courbure a pour coordonnée $\frac{1}{2}$ et le cercle de courbure a pour équation

$$x^2 + y^2 - y = 0. \tag{5}$$

En tenant compte de (5), (1) s'écrit $x = y$, en supprimant le facteur y^2; d'où $x = y = \frac{1}{2}$. *Le cercle de courbure coupe donc la courbe* en cinq points confondus en O et *au sommet* $S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

On peut remarquer que, parmi les cinq points confondus en O, un seul appartient à la branche verticale; donc, les quatre autres appartiennent à la branche horizontale; celle-ci a donc un *contact du troisième ordre* avec son cercle de courbure.

Le cercle de courbure de la branche verticale se déduit du précédent par symétrie. Il coupe aussi le folium au sommet.

Deuxième méthode. — Coupons la courbe par un cercle quelconque tangent en O à Ox, soit

$$x^2 + y^2 - 2Ry = 0. \tag{6}$$

Nous allons écrire qu'il y a plus de trois points d'intersection confondus avec O. En tenant compte de (6), on tire de (1), après suppression du facteur y :

$$x = \frac{y^2}{y + 1 - 2R}. \tag{7}$$

Portant dans (6), il vient, en supprimant encore le facteur y,

$$y^3 + (y - 2R)(y + 1 - 2R)^2 = 0. \tag{8}$$

Si R est quelconque, on a trois racines non nulles en y. Pour avoir le cercle osculateur, il faut que l'équation (8) n'ait pas de terme constant.

Cela donne $R = \frac{1}{2}$. On retrouve l'équation (5). En outre, avec cette hypothèse, l'équation (8) se réduit à $y - R = 0$, après suppression du facteur $2y^2$. On a donc un seul point d'intersection autre que O. Son ordonnée est $\frac{1}{2}$ et la formule (7) montre que son abscisse a la même valeur. On retrouve bien les résultats obtenus par la première méthode.

6. *Rayon de courbure et développée de la courbe enveloppe de la droite*

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \sin m\varphi = 0. \tag{1}$$

Appliquons la formule du n° 320. Nous avons

$$R = \sin m\varphi(m^2 - 1) = p(m^2 - 1). \tag{2}$$

Donc, si P est la projection de O sur la tangente MT et si C est le centre de courbure, on a

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{PO}} = 1 - m^2. \tag{3}$$

La développée est l'enveloppe de la droite (n° 320)

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi - m\cos m\varphi = 0. \tag{4}$$

Si l'on pose $\varphi = \varphi' - \frac{\pi}{2}$, cette équation devient

$$x\cos\varphi' - y\sin\varphi' - m\sin\left[m\varphi' - (m-1)\frac{\pi}{2}\right] = 0. \tag{5}$$

Cette droite enveloppe une courbe qui se déduit (¹) de l'enveloppe de la droite (1) par *une homothétie* dans le rapport m et *une rotation* de l'angle $\left(1 - \frac{1}{m}\right)\frac{\pi}{2}$. *La développée de la courbe proposée est donc semblable à cette courbe.* Il en est évidemment de même de toutes les développées successives.

7. *Calculer le rayon de courbure en coordonnées polaires.*

(¹) Cela est évident par la considération des podaires (n° 215).

Appliquons la formule (29) du n° 321 :

$$dx = d\omega + d\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{\rho'}{\rho}\right) = d\omega\left[1 + \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}\right].$$

D'autre part (t. I, n° 173),

$$ds^2 = (\rho'^2 + \rho^2)\, d\omega^2.$$

Donc,

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}. \tag{1}$$

On peut transformer cette expression, de manière à faire apparaître au dénominateur la quantité $\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)''$, qui doit s'annuler en même temps, d'après ce que nous savons des points d'inflexion (n° 255). Effectivement, divisons haut et bas par ρ^3 :

$$R = \frac{\left(1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{\rho} + \frac{2\rho'^2}{\rho^3} - \frac{\rho''}{\rho^2}} = \frac{\left(1 + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r + r''}, \tag{2}$$

en posant $r = \frac{1}{\rho}$.

8. *Calculer le rayon de courbure de la courbe*

$$\rho = \left(\sin\frac{\omega}{m}\right)^m. \tag{1}$$

Montrer que la projection du centre de courbure sur le rayon vecteur divise ce rayon dans un rapport constant.

On a

$$\operatorname{tang} V = \frac{\rho}{\rho'} = \operatorname{tang}\frac{\omega}{m}; \tag{2}$$

d'où

$$V = \frac{\omega}{m}, \tag{3}$$

n orientant la courbe.

Nous avons ensuite (n° 252)

$$\rho\, d\omega = ds \sin V = ds \sin \frac{\omega}{m};$$

d'où

$$(4) \qquad ds = \frac{\rho\, d\omega}{\sin \dfrac{\omega}{m}} = \left(\sin \frac{\omega}{m}\right)^{m-1} d\omega.$$

Le rayon de courbure algébrique est, dès lors (¹),

$$(5) \quad R = \frac{ds}{d\omega + dV} = \frac{\left(\sin \dfrac{\omega}{m}\right)^{m-1}}{1 + \dfrac{1}{m}} = \frac{m}{m+1}\left(\sin \frac{\omega}{m}\right)^{m-1} = \frac{m}{m-1}\rho^{\frac{m-1}{m}}.$$

Projetons le rayon de courbure $\overrightarrow{MC}$ sur la demi-droite d'angle polaire ω; si C′ désigne la projection du point C, nous avons

$$\overline{MC'} = R\cos\left(V + \frac{\pi}{2}\right) = -R\sin V = -\frac{m}{m+1}\left(\sin \frac{\omega}{m}\right)^{m} = -\frac{m}{m+1}\rho$$

ou

$$(6) \qquad \overline{MC'} = \frac{m}{m+1}\overline{MO}.$$

Ceci prouve bien que C′ divise MO dans un rapport constant.

Remarque. — *Pour* $m = -2$, l'équation (1) s'écrit

$$(7) \qquad \rho = \frac{1}{\sin^2 \dfrac{\omega}{2}} = \frac{2}{1 - \cos\omega}.$$

Elle représente *une parabole de foyer* O, d'axe Ox et de paramètre égal à 2 (n° 320). Dans ce cas, on a

$$(8) \qquad \overline{MC'} = 2\overline{MO};$$

O est le milieu de MC′. De plus, (5) donne $R = 2\rho^2$.

Pour $m = -\frac{1}{2}$, l'équation (1) s'écrit

$$(9) \qquad \rho^2 \sin 2\omega = -1.$$

(¹) On retrouverait cette formule en appliquant les formules (1) ou (2) de l'exercice précédent. Mais, le signe ne serait pas précisé.

L'équation cartésienne correspondante est

$$2xy = -1. \tag{10}$$

La courbe est une *hyperbole équilatère*, d'asymptotes Ox et Oy. Dans ce cas, la formule (6) donne

$$\overline{MC'} = -\overline{MO}; \tag{11}$$

C′ est symétrique de O par rapport à M. De plus, (5) donne

$$R = -\rho^3. \tag{12}$$

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Soit une courbe quelconque (C). Soient M un de ses points, M_1 le centre de courbure correspondant et P un point de la tangente en M, décrivant une développante (Γ) de (C). On considère le point Q, qui divise le segment PM_1 dans un rapport constant $-\lambda$. Démontrer que la tangente en Q au lieu (S) de ce point est parallèle à MM_1. Calculer le rayon de courbure de ce lieu. Démontrer que les courbes (S), qui correspondent aux différentes développantes (Γ), sont des courbes parallèles.

2. Soient deux courbes quelconques (C) et (C′). A chaque point M de l'une, on associe un point M′ de l'autre, de telle manière que les tangentes en M et M′ soient parallèles. Puis, on prend le point M″, qui divise MM′ dans le rapport constant $-\lambda$. Ce point décrit une courbe (C″), dont la tangente en M″ est parallèle aux tangentes en M à (C) et en M′ à (C′). Calculer le rayon de courbure de (C″) en M″, en fonction des rayons de courbure de (C) en M et de (C′) en M′. Démontrer que le centre de courbure M_1'' de (C″) divise dans le rapport $-\lambda$ le segment M_1M_1', si l'on appelle M_1 et M_1' les centres de courbure de (C) et de (C′). (*Cf.* Exercice précédent.)

3. Soit la courbe (C) définie par les équations paramétriques

$$x = \sin t \operatorname{ch} t + \cos t \operatorname{sh} t, \qquad y = \sin t \operatorname{sh} t - \cos t \operatorname{ch} t.$$

Calculer son rayon de courbure et déterminer ses développées successives. Montrer que ces développées se reproduisent périodiquement et qu'elles sont deux à deux symétriques par rapport à l'origine. Trouver l'équation polaire de la courbe décrite par le milieu du rayon de courbure de (C).

4. Soit la courbe

$$x = t - \frac{t^3}{3}, \qquad y = t^2.$$

Calculer son arc, l'angle polaire de sa demi-tangente positive et son rayon de courbure. Construire sa développée et étudier la forme de ses développantes.

5. Mêmes questions pour la courbe

$$x = t - e^{2t}, \qquad y = e^t\sqrt{1 - e^{2t}}.$$

6. Étudier les variations des rayons de courbure et construire les développées des courbes

$$y = e^x, \qquad y = \log x, \qquad y = \operatorname{tang} x.$$

7. Soit la courbe (*cardioïde*)

$$x = \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2}, \qquad y = \frac{2t}{(1 + t^2)^2}.$$

Trouver l'équation du cercle osculateur au point de paramètre θ. En déduire les coordonnées du centre de courbure et le rayon de courbure. Comparer les résultats obtenus avec ceux de l'Exercice résolu n° 8, en prenant l'équation polaire de la courbe proposée.

[*Cf.* Exercice résolu n° 4. Au lieu d'introduire la quatrième racine θ', on peut aussi écrire que θ est racine triple, en annulant les dérivées première et seconde.

La projection du centre de courbure sur OM doit être au tiers de OM, à partir de O.]

8. Soient deux fonctions rationnelles $\theta = f(t)$ et $p = g(t)$. On considère la courbe C enveloppe de la droite

$$\frac{1 - \theta^2}{1 + \theta^2}x + \frac{2\theta}{1 + \theta^2}y = \frac{1 + \theta^2}{2}\frac{p'}{\theta'}.$$

Montrer que c'est la courbe la plus générale dont les coordonnées et l'arc puissent s'exprimer rationnellement en fonction d'un même paramètre t.

[Poser $\theta = \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}$ et passer par l'intermédiaire du rayon de courbure. Il est facile de vérifier que la courbe C satisfait aux conditions imposées. Pour la réciproque, montrer d'abord que les cosinus directeurs de la tangente sont rationnels en t. Puis, introduire une développante et montrer que l'équation de sa tangente peut se mettre rationnellement

sous la forme canonique. En dérivant cette équation par rapport à l'angle polaire, on obtient l'équation de la tangente à C, qui se met ensuite sous la forme de l'énoncé, par le changement de variable indiqué ci-dessus. Pour montrer que θ est rationnel, il suffit de remarquer que $\theta = \dfrac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}$.]

9. Soient une courbe quelconque (C) et M un de ses points. On appelle ρ la distance OM et p la distance algébrique du point O à la tangente en M. Démontrer que le rayon de courbure en M, compté positivement dans le même sens que p, est égal à $-\dfrac{\rho\, d\rho}{dp}$.

[Partir de la tangente sous la forme normale et remarquer que $\rho^2 = p^2 + p'^2$.]

10. Dans l'Exercice n° 8, on prend $p = \dfrac{\theta^m}{1+\theta^2}$. Calculer les équations paramétriques de la courbe (C) correspondante, son arc, son rayon de courbure, les coordonnées de son centre de courbure. Cas de $m = 3$.

(Pour $m = 3$, *cf.* Exercice n° 4.)

11. Soit la courbe (C), d'équation polaire $\rho = \operatorname{th}\dfrac{\omega}{2}$.

Calculer son rayon de courbure en $M(\rho, \omega)$, ainsi que les coordonnées de son centre de courbure par rapport aux axes MX et MY, d'angles polaires respectifs ω et $\omega + \dfrac{\pi}{2}$:

$$\left[R = \left(\frac{1+\rho^2}{2}\right)^2,\ X = -\frac{\rho(1+\rho^2)}{2},\ Y = \frac{1-\rho^4}{4}\right].$$

12. Calculer le rayon de courbure de la lemniscate $\rho = \sqrt{\cos 2\omega}$ (*cf.* Exercice résolu n° 8) et de la cardioïde $\rho = 1 + \cos\omega$ (*cf.* Exercice proposé n° 7).

13. Calculer les rayons de courbure à l'origine des courbes

$$(x+y)(x^2+y^2) - xy = 0, \qquad (x^2+y^2)^2 - xy = 0,$$
$$xy(x-2y) + x^2 - y = 0.$$

(*Cf.* Exercice résolu n° 5.)

CHAPITRE XXII.

COURBURE DES COURBES GAUCHES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Soit la courbe* (C), *définie par les équations*

$$x = \frac{z^5}{10}, \qquad y = \frac{z^3}{3}. \tag{1}$$

Calculer les neuf cosinus du trièdre de Frenet, la courbure, la torsion, les coordonnées du centre de courbure, les équations de l'axe de courbure, du cercle osculateur et de la sphère osculatrice. Déterminer les développées de (C).

On a

$$ds^2 = dz^2\left(\frac{z^8}{4} + z^4 + 1\right) = \frac{(z^4+2)^2}{4}\,dz^2;$$

d'où, en orientant la courbe dans le sens des z croissants,

$$ds = \frac{z^4+2}{2}\,dz. \tag{2}$$

Les cosinus directeurs de la demi-tangente positive sont alors

$$a = \frac{z^4}{z^4+2}, \qquad b = \frac{2z^2}{z^4+2}, \qquad c = \frac{2}{z^4+2}. \tag{3}$$

Ceux de la normale principale sont proportionnels à $\frac{da}{dz}$, $\frac{db}{dz}$, $\frac{dc}{dz}$; ils sont de la forme

$$a' = \lambda 2z^2, \qquad b' = \lambda(2 - z^4), \qquad c' = \lambda(-2z^2).$$

Élevant au carré et ajoutant, il vient

$$1 = \lambda^2(2 + z^4)^2.$$

Nous en tirons, par exemple, $\lambda = \frac{1}{2+z^4}$ et nous avons

$$(4) \qquad a' = \frac{2z^2}{2+z^4}, \qquad b' = \frac{2-z^4}{2+z^4}, \qquad c' = \frac{-2z^2}{2+z^4}.$$

Les cosinus directeurs de la binormale sont enfin obtenus par les formules

$$a'' = bc' - cb', \qquad b'' = ca' - ac', \qquad c'' = ab' - ba',$$

qui nous donnent, tous calculs faits,

$$(5) \qquad a'' = \frac{-2}{2+z^4}, \qquad b'' = \frac{2z^2}{2+z^4}, \qquad c'' = \frac{-z^4}{2+z^4}.$$

Calculons maintenant la courbure par la formule $\frac{dc}{ds} = \frac{c'}{R}$. Nous avons

$$-\frac{8z^3}{(2+z^4)^2}\,\frac{2}{2+z^4} = \frac{-2z^2}{2+z^4}\,\frac{1}{R};$$

d'où

$$(6) \qquad \frac{1}{R} = \frac{8z}{(2+z^4)^2}.$$

Pour la torsion, prenons la formule $\frac{da''}{ds} = \frac{a'}{T}$, en observant que $a'' = -c$ et $a' = -c'$. Nous voyons, sans aucun calcul, que $\frac{1}{T} = \frac{1}{R}$. Donc,

$$(7) \qquad \frac{1}{T} = \frac{8z}{(2+z^4)^2}.$$

Les coordonnées du centre de courbure sont

$$x_1 = x + Ra', \qquad y_1 = y + Rb', \qquad z_1 = z + Rc'$$

ou, tous calculs faits,

$$(8) \qquad x_1 = \frac{z}{2} + \frac{7}{20}z^5, \qquad y_1 = \frac{1}{2z} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^7}{8}, \qquad z_1 = \frac{z}{2} - \frac{z^5}{4}.$$

Les équations de l'axe de courbure sont

$$(9) \qquad \frac{X - x_1}{-2} = \frac{Y - y_1}{2z^2} = \frac{Z - z_1}{-z^4}.$$

On peut aussi prendre l'équation du plan normal

$$\left(X-\frac{z^5}{10}\right)z^4+\left(Y-\frac{z^3}{3}\right)2z^2+(Z-z)2=0$$

ou

$$Xz^4+2Yz^2+2Z=\frac{z^9}{10}+\frac{2z^5}{3}+2z, \tag{10}$$

à laquelle on adjoint l'équation dérivée par rapport à z :

$$2Xz^3+2Yz=\frac{9z^8}{20}+\frac{5z^4}{3}+1. \tag{11}$$

Les équations du cercle de courbure sont

$$2\left(X-\frac{z^5}{10}\right)-2z^2\left(Y-\frac{z^3}{3}\right)+z^4(Z-z)=0, \tag{12}$$

$$(X-x_1)^2+(Y-y_1)^2+(Z-z_1)^2-R^2=0. \tag{13}$$

L'équation (12) est celle du plan osculateur et peut s'écrire

$$2X-2z^2Y+z^4Z=\frac{8}{15}z^5. \tag{14}$$

Quant à l'équation (13), elle représente la sphère qui admet le cercle de courbure comme grand cercle. Nous ne croyons pas utile de la développer.

Pour trouver la sphère osculatrice, nous pourrions utiliser la formule (41) du n° 333, qui nous donnerait les coordonnées du centre de cette sphère sous la forme

$$\alpha=x_1-T\frac{dR}{ds}a'', \qquad \beta=y_1-T\frac{dR}{ds}b'', \qquad \gamma=z_1-T\frac{dR}{ds}c''. \tag{15}$$

On peut aussi déterminer α, β, γ, δ, par la condition que la sphère

$$X^2+Y^2-Z^2-2\alpha X-2\beta Y-2\gamma Z+\delta=0 \tag{16}$$

coupe (C) en quatre points confondus. Suivons cette méthode.

L'équation aux z des points d'intersection est

$$\frac{z^{10}}{100}+\frac{z^6}{9}+z^2-\alpha\frac{z^5}{5}-2\beta\frac{z^3}{3}-2\gamma z+\delta=0. \tag{17}$$

Écrivons qu'elle a une racine quadruple, en annulant les trois pre-

mières dérivées :

$$\frac{z^9}{10} + \frac{2}{3}z^5 + 2z - \alpha z^4 - 2\beta z^2 - 2\gamma = 0, \tag{18}$$

$$\frac{9}{10}z^8 + \frac{10}{3}z^4 + 2 - 4\alpha z^3 - 4\beta z = 0, \tag{19}$$

$$\frac{36}{5}z^7 + \frac{40}{3}z^3 - 12\alpha z^2 - 4\beta = 0. \tag{20}$$

De (20), nous tirons β. Portant dans (19), nous avons α. Ensuite, (18) nous donne γ, et enfin, (17) nous donne δ. On trouve ainsi, tous calculs faits,

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{63}{80}z^5 + \dfrac{5}{4}z - \dfrac{1}{4z^3}, \\ \beta = -\dfrac{9}{16}z^7 - \dfrac{5}{12}z^3 + \dfrac{3}{4z}, \\ \gamma = \dfrac{7}{32}z^9 + \dfrac{z^5}{8} + \dfrac{3}{8}z. \end{cases} \tag{21}$$

$$\delta = \frac{z^2}{5} + \frac{z^6}{9} + \frac{21}{100}z^{10}. \tag{22}$$

En portant dans (16), nous aurions l'équation de la sphère osculatrice. A titre de vérification, le lecteur pourra comparer les formules (21) et (15).

Pour déterminer les développées de la courbe (C), il nous faut calculer l'angle (n° 329)

$$\theta = \int \frac{ds}{T} = \int \frac{8z}{(2+z^4)^2}\,\frac{z^4+2}{2}\,dz = \int \frac{4z\,dz}{z^4+2} = \sqrt{2}\,\operatorname{arctang}\frac{z^2}{\sqrt{2}} + C. \tag{23}$$

Les équations paramétriques d'une développée quelconque sont alors (n° 329)

$$\begin{cases} X = \dfrac{z}{2} + \dfrac{7}{20}z^5 - \dfrac{2+z^4}{4z}\tang\theta, \\ Y = \dfrac{1}{2z} + \dfrac{z^3}{3} - \dfrac{z^7}{8} + \dfrac{(2+z^4)z}{4}\tang\theta, \\ Z = \dfrac{z}{2} - \dfrac{z^5}{4} - \dfrac{(2+z^4)z^3}{8}\tang\theta. \end{cases} \tag{24}$$

On pourrait, par exemple, exprimer X, Y, Z en fonction de θ, en remplaçant z par $\sqrt{\sqrt{2}\tang\dfrac{\theta - C}{\sqrt{2}}}$. On simplifierait ensuite l'écriture, en prenant pour paramètre $\dfrac{\theta - C}{\sqrt{2}} = \varphi$.

2. *Trouver le centre de courbure, à l'origine, de la courbe définie par les équations*

$$y = \sin x, \qquad z = x(x+1). \tag{1}$$

L'équation du plan normal au point d'abscisse x est

$$\begin{aligned} X + Y\cos x + Z(1+\sin x + x\cos x) \\ = 2x + \sin x\cos x + 2x\sin x \\ + x^2\cos x + x\sin^2 x + x^2\sin x\cos x. \end{aligned} \tag{2}$$

L'axe de courbure correspondant est défini par l'équation précédente et par l'équation dérivée par rapport à x :

$$-Y\sin x + Z(2\cos x - x\sin x) = 2 + \cos 2x + \dots, \tag{3}$$

les termes non écrits s'annulant pour $x = 0$.

L'axe de courbure au point O a pour équations

$$X + Y + Z = 0, \qquad 2Z = 3. \tag{4}$$

Le plan osculateur, qui est perpendiculaire à cet axe, a pour équation

$$X - Y = 0. \tag{5}$$

Le centre de courbure cherché est défini par les trois équations (4) et (5). Ses coordonnées sont

$$X = -\frac{3}{4}, \qquad Y = -\frac{3}{4}, \qquad Z = \frac{3}{2}. \tag{6}$$

Le rayon de courbure égale $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. A titre de vérification, on peut retrouver cette valeur par l'emploi de la formule (11) du n° 327.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Sur la tangente en chaque point M d'une courbe gauche (C), on porte une longueur constante MP. Démontrer que le plan normal, en P, au lieu du point P passe par l'axe de courbure de la courbe (C), relatif au point M.

(*Cf.* Chap. XIII, Exercice proposé n° 1.)

2. Résoudre, pour la courbe

$$y = x^2, \qquad z = \frac{2}{3}x^3,$$

les questions posées dans l'Exercice résolu n° 1.

3. Même question pour la courbe

$$x = \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t}, \qquad y = \frac{\cos t}{\operatorname{sh} t}, \qquad z = \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}.$$

Quelle est la projection stéréographique, sur le plan des xy, de l'indicatrice des binormales? (Spirale logarithmique.)

4. Soit la courbe

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = e^t.$$

Calculer les coordonnées du centre de courbure au point $M(x, y, z)$, en fonction de x, y, z. Calculer également la torsion.

5. Chercher le centre de courbure, à l'origine, de la courbe

$$y = xe^x, \qquad z = xe^{-x}.$$

[*Cf.* Exercice résolu n° 2. Développer les coefficients du plan normal, suivant les puissances croissantes de x, en s'arrêtant au premier ordre. On peut aussi partir des développements du second ordre de y et de z.]

6. Démontrer qu'on obtient les développantes d'une courbe gauche comme celles d'une courbe plane, c'est-à-dire en portant $\overline{MP} = -s$ sur la tangente en M.

7. Soit une courbe (C), à courbure constante. Soit (C_1) la courbe décrite par son centre de courbure M_1 en M. Démontrer que le point M est centre de courbure de (C_1) en M_1. La tangente à chacune des deux courbes est axe de courbure de l'autre.

[On peut démontrer la seconde propriété, d'où se déduit ensuite la première, en s'appuyant sur la formule (41) et le théorème III du n° 333. On peut aussi donner une démonstration entièrement analytique, en faisant usage des formules de Frenet.]

8. Calculer le rayon de courbure de la courbe de l'Exercice proposé n° 9 du Chapitre XVIII.

$$\left[R^2 = \frac{(1+x^2)^3}{4x^3(1+x^3)}. \right]$$

On a

$$A = 2x^3z(z^3-3), \qquad B = 2x^3(3z^2-1), \qquad C = 2x^3;$$
$$A^2+B^2+C^2 = 4x^6[1+(1+z^2)^3] = 4(x^3+1)x^3;$$
$$x'^2+y'^2+z'^2 = 1+x^2;$$

d'où R^2.]

CHAPITRE XXIII.

COURBURE DES LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Trouver le centre de courbure de l'intersection de deux surfaces.*

Soient deux surfaces (S) et (S'), qui se coupent suivant la ligne (C). Soient M un point de cette ligne, MT la tangente en ce point. Le centre de courbure C se trouve *à l'intersection des deux cercles de Meusnier* relatifs aux deux surfaces et à la tangente MT. Si O et O' désignent les centres de courbure normale de (S) et de (S'), qui correspondent à la tangente MT, le point C est à l'intersection des deux cercles décrits, dans le plan perpendiculaire à MT, sur MO et sur MO' comme diamètres respectifs. C'est, si l'on veut, *la projection orthogonale de* M *sur la droite* OO'. On en conclut que *le plan osculateur de* (C) *en* M *est le plan perpendiculaire à* OO' *mené par* M et que OO' est l'axe de courbure.

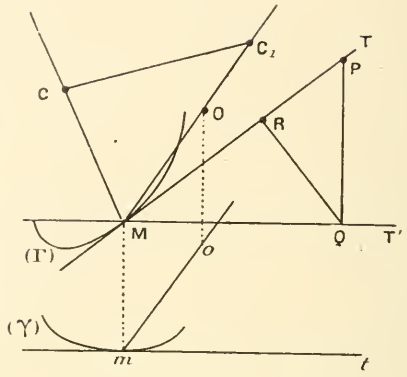
2. *Connaissant le rayon de courbure d'une courbe plane, trouver celui de sa projection orthogonale sur un plan quelconque.*

Soit la courbe (Γ), qui se projette en (γ) sur le plan horizontal (H). (*fig.* 32). Nous nous proposons de construire le centre de courbure de (γ) en *m*, connaissant le centre de courbure C de (Γ) en M.

Considérons le cylindre projetant (S), qui admet (γ) pour section droite. La section de ce cylindre par le plan parallèle à (H), mené par M est une courbe projetée en vraie grandeur suivant (γ). Son centre de courbure O se projette suivant le centre de courbure cherché *o*. Or, O n'est autre que le centre de courbure normale de (S), correspondant à la tangente MT'. D'autre part, le plan OMT' étant un plan de symétrie du cylindre, MT' est un axe de symétrie de l'indicatrice, c'est-à-dire une tangente principale; $\overline{MO} = R_1$ est donc un rayon de courbure principal. L'autre rayon de courbure principal est le rayon de courbure de

la génératrice Mm ; il est infini et le point M est un point parabolique (*cf.* n° 374).

Fig. 32.



Si l'on appelle α l'angle T'MT et R le rayon de courbure normale relatif à la tangente MT, on a, d'après la formule d'Euler (n° 339),

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1};$$

d'où

$$R_1 = R\cos^2\alpha.$$

Or, $R = \overline{MC_1}$ se déduit de C par le théorème de Meusnier : le point C_1 est à l'intersection de MO avec la perpendiculaire menée par C au plan de (Γ). Nous avons, dès lors, la construction suivante :

Après avoir déterminé, comme il vient d'être expliqué, le point C_1, *portons, sur* MT, *la longueur* $MP = MC_1$. *Projetons orthogonalement* P *en* Q *sur* MT', *puis* Q *en* R *sur* MT. *Portons, sur* MC_1 *et dans le même sens que* $\overrightarrow{MC_1}$, *la longueur* $MO = MR$. *Projetons enfin* O *en* o *sur le plan* (Π) *et nous avons le centre de courbure cherché.*

Remarque. — La construction inverse permettrait évidemment de *déterminer le rayon de courbure de* (Γ), *connaissant celui de* (γ).

3. *Déterminer l'indicatrice et les rayons de courbure principaux, à l'origine des coordonnées, de la surface*

$$(1) \qquad (x - \lambda)(x^2 + y^2 + z^2) + \mu(yz + zx + xy) + z = 0.$$

Discuter, suivant les valeurs de λ *et de* μ. *Cas où* $\lambda = \mu = 0$.

Le plan tangent à l'origine est le plan des xy, car le terme de moindre degré est z (n° 206). Pour déterminer l'indicatrice, on pourrait, en se basant sur la théorie des fonctions implicites (t. I, n° 135), calculer les dérivées partielles r, s, t et appliquer l'équation (9) du n° 336. Mais, il est plus simple de remarquer que le premier membre de cette équation est, d'après la formule (16) du n° 342, le double de la partie principale de z, quand on regarde x et y comme des infiniment petits indépendants et du premier ordre.

Pour calculer cette partie principale, nous appliquons la méthode indiquée au n° 233. Autrement dit, nous supprimons, dans l'équation (1), tout terme qui est, à coup sûr, d'ordre infinitésimal supérieur à un terme non supprimé. De cette manière, les termes en z disparaissent tous, sauf le dernier. Quant aux termes indépendants, ils se réduisent à ceux du second ordre. Notre équation devient, dès lors, en désignant par Z la partie principale cherchée,

$$Z - \lambda(x^2 + y^2) + \mu xy = 0;$$

d'où

$$Z = \lambda(x^2 + y^2) - \mu xy.$$

L'équation de l'indicatrice est donc

$$2\lambda(x^2 + y^2) - 2\mu xy = 1. \tag{2}$$

La courbure de la section normale d'angle polaire α est, par suite,

$$\frac{1}{R} = 2\lambda(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 2\mu\cos\alpha\sin\alpha = 2\lambda - \mu\sin 2\alpha. \tag{3}$$

Ses maximum et minimum, obtenus pour $\alpha = \pm\frac{\pi}{4}$, sont $2\lambda - \mu$ et $2\lambda + \mu$. *Les tangentes principales sont donc les bissectrices de l'angle* xOy et les rayons de courbure principaux sont

$$R_1 = \frac{1}{2\lambda - \mu}, \qquad R_2 = \frac{1}{2\lambda + \mu}. \tag{4}$$

Suivant que μ est compris entre -2λ et $+2\lambda$, extérieur à cet intervalle ou égal à $\pm 2\lambda$, l'indicatrice est elliptique, hyperbolique ou parabolique.

Si $\lambda = \mu = 0$, l'équation (2) devient impossible. Dans ce cas, la partie principale de z est

$$Z = -x(x^2 + y^2). \tag{5}$$

Elle est du troisième ordre. La théorie de l'indicatrice ne s'applique plus. Mais, la formule (3) n'en subsiste pas moins et montre que *la courbure de toute section normale est nulle*. Autrement dit, le point O est, pour une telle section, un point d'inflexion. Ceci résulte d'ailleurs aussi du fait que, z étant infiniment petit du troisième ordre, la tangente à toute section normale a un contact du second ordre avec cette section (n° 219).

Généralisation. — Soit, d'une manière générale, une surface algébrique quelconque, tangente en O au plan des xy et admettant ce point pour point simple. Son équation est nécessairement de la forme

$$z - \varphi_p(x, y) + \ldots = 0, \tag{6}$$

$\varphi_p(x, y)$ désignant un polynome homogène de degré $p \geq 2$ et les termes non écrits étant de degré supérieur en x, y ou bien renfermant z multiplié par des puissances non nulles de x, y ou z.

Dans ces conditions, la partie principale de z est $\varphi_p(x, y)$.

Si $p = 2$, on a une indicatrice, représentée par l'équation

$$2\varphi_p(x, y) = 1. \tag{7}$$

Si $p > 2$, la courbure de toute section normale est nulle.

4. *Une surface* (S) *est engendrée par des cercles* (C) *normaux à un plan* (H). *Trouver les rayons de courbure principaux en un point quelconque de la section par* (H). *Appliquer ceci à la section de la surface*

$$xy(x^2 + y^2 + z^2) = x^2 + y^2 \tag{1}$$

par le plan des xy.

Soit M un point quelconque de la section (Σ) considérée. La normale MN en ce point à (S), étant perpendiculaire à la tangente au cercle (C), se trouve dans le plan (H). D'autre part, ce dernier plan est manifestement un plan de symétrie pour la surface; c'est donc un plan de section normale principale. Le premier rayon de courbure principal relatif au point M est, par suite, le rayon de courbure $R_1 = \overline{MC_1}$ de la courbe (Σ) au point M. Le second, R_2, est le rayon de courbure normale du cercle (C). On l'obtient, par application du théorème de Meusnier, en prenant l'intersection C_2 de MN avec l'axe du cercle; on a $R_2 = \overline{MC_2}$.

Application. — Les sections de la surface (S), représentée par l'équa-

tion (1), par les plans menés par Oz sont des cercles (C). Si l'on coupe, en effet, par le plan

$$\frac{x}{\cos\theta} = \frac{y}{\sin\theta}, \tag{2}$$

l'équation (1) peut être remplacée par

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}. \tag{3}$$

La surface (S) peut donc être considérée comme engendrée par le cercle (C) représenté par les équations (2) et (3). Elle reste bien dans la catégorie examinée précédemment.

La section (Σ) a pour équation

$$xy = 1, \tag{4}$$

en négligeant le facteur $x^2 + y^2$. C'est une hyperbole équilatère, abstraction faite des droites isotropes de l'origine.

Si l'on se reporte à l'Exercice résolu n° 8 du Chapitre XXI, on voit immédiatement, puisque le cercle (C) a pour centre l'origine, que les points C_1 et C_2 ont pour milieu le point M. *Les rayons de courbure principaux sont symétriques.* En chaque point de (Σ), l'indicatrice est une hyperbole équilatère; les tangentes asymptotiques sont inclinées à 45° sur le plan des xy. Enfin, la valeur absolue commune aux deux rayons R_1 et R_2 est, en se reportant encore à l'Exercice précité et rétablissant une homogénéité intermédiaire (1), $\frac{\overline{OM}^3}{2}$.

5. *Étudier les variations de la courbure de la section de la surface*

$$x(x^2 - y^2 + z^2) + yz = 0 \tag{1}$$

par un plan tournant autour de Oz.

---

(1) Si nous désignons par $2a$ la longueur de l'axe transverse de l'hyperbole de l'Exercice n° 8, nous avons $a^2 = 1$. La formule (12) de cet exercice peut alors s'écrire, en négligeant le signe de R,

$$R = \frac{\overline{OM}^3}{a^2}.$$

Elle est maintenant homogène. Pour l'hyperbole (Σ), qui nous intéresse actuellement, nous avons $a^2 = 2$. Donc $R = \frac{\overline{OM}^3}{2}$.

L'origine est un point double pour la surface, le cône des tangentes en ce point étant constitué par les plans xOy et zOx. La théorie générale ne s'applique donc pas et il nous faut étudier le problème directement.

Coupons par le plan

$$y = mx. \tag{2}$$

La section se compose de l'axe des z et d'une conique, dont la projection sur zOx a pour équation

$$x^2(1 - m^2) + z^2 + mz = 0. \tag{3}$$

Pour déterminer le centre de courbure de cette conique, écrivons l'équation du plan normal :

$$X + mY + Zz' = x(1 + m^2) + zz', \tag{4}$$

où z' désigne la dérivée $\dfrac{dz}{dx}$, dont on a la valeur en dérivant l'équation (3) par rapport à x :

$$2x(1 - m^2) + 2zz' + mz' = 0. \tag{5}$$

Dérivons (4) par rapport à x; nous obtenons la deuxième équation de l'axe de courbure de notre section :

$$Zz'' = 1 + m^2 + zz'' + z'^2, \tag{6}$$

z' étant donné par l'équation

$$2(1 - m^2) + 2zz'' + 2z'^2 + mz'' = 0, \tag{7}$$

déduite de (5) par dérivation.

Plaçons-nous maintenant à l'origine. En faisant $x = z = 0$ dans (5), nous avons d'abord $z'_0 = 0$. Portant dans (7), il vient

$$2(1 - m^2) + mz''_0 = 0. \tag{8}$$

L'équation (6) nous donne, d'autre part, la cote du centre de courbure cherché, ou, ce qui revient au même, le rayon de courbure :

$$R = \frac{1 + m^2}{z''_0} = \frac{m(1 + m^2)}{2(m^2 - 1)}. \tag{9}$$

On voit que cette expression n'a rien de commun avec celle qui résulte de la formule (7) du n° 334, quand on y pose $\operatorname{tang}\alpha = m$.

L'étude de ses variations ne présente aucune difficulté et donne lieu au

Tableau suivant, où l'on considère seulement les valeurs positives de m, à cause de l'imparité de R vis-à-vis de cette variable :

m	0		1		2,06		∞
R	0	$-\infty$		$+\infty$	1,66		$-\infty$

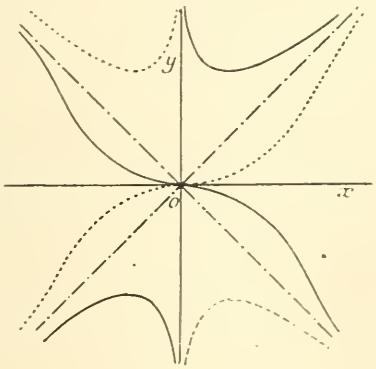
On peut aussi, si l'on veut, construire une indicatrice, en portant, sur chaque tangente, une longueur $OP = \sqrt{\pm R}$.

Cette indicatrice se compose des deux cubiques définies par la double équation

$$2xy(x^2 - y^2) \pm y = 0. \tag{10}$$

Elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport à Ox (ou Oy) et se construisent aisément. Elles ont la forme suivante (*fig.* 33), où l'on a

Fig. 33.



tracé en pointillé la courbe qui correspond au signe —, dans l'équation (10).

6. *Surfaces de translation.*

On appelle *surface de translation* toute surface S engendrée par la translation d'une ligne C. Considérons un point M quelconque de cette ligne. Pendant la translation, il décrit une ligne C'. Un autre point M_1 de C décrit, de même, une ligne C'_1. Il est évident que C' peut être amenée sur C'_1 par la translation $\overrightarrow{MM_1}$. Ceci nous prouve que la surface peut aussi être engendrée par la translation de la ligne C'. Donc, *toute*

surface de translation possède deux familles de lignes telles que les lignes d'une même famille se déduisent de l'une d'elles par translation, chaque point engendrant, dans cette translation, une ligne de l'autre famille.

Supposons que M_1 tende vers M; MM_1 tend vers la tangente MT en M à C. Le cylindre qui s'appuie sur C′ et a ses génératrices parallèles à MM_1 devient, à la limite, le cylindre circonscrit à S le long de C′. La tangente MT est donc une génératrice de ce dernier.

Il s'ensuit, d'après le théorème de Dupin (n° 334), que les tangentes MT et MT′ à C et à C′ sont conjuguées. Autrement dit, *les deux familles de lignes* C *et* C′ *sont deux réseaux conjugués.*

Tout ceci est facile à retrouver analytiquement. Soient

$$(1) \qquad x = f(u), \qquad y = f_1(u), \qquad z = f_2(u)$$

les équations de la ligne C dans sa position initiale.

Si l'on imprime à cette ligne une translation variable, dont les composantes suivant les axes soient $g(v)$, $g_1(v)$, $g_2(v)$, les coordonnées de chaque point sont augmentées de ces composantes. Les coordonnées d'un point quelconque de la surface sont donc

$$(2) \quad x = f(u) + g(v), \qquad y = f_1(u) + g_1(v), \qquad z = f_2(u) + g_2(v).$$

On peut maintenant, dans ces équations, intervertir les rôles de u et v et l'on voit que la surface peut aussi être engendrée par la translation d'une ligne $u = \text{const.}$

Cherchons l'équation différentielle des lignes asymptotiques. On peut prendre comme coefficients du plan tangent

$$(3) \quad a = f_1' g_2' - g_1' f_2', \qquad b = f_2' g' - g_2' f', \qquad c = f' g_1' - g' f_1'.$$

En portant dans l'équation (3₂) du n° 345, on obtient

$$(4) \qquad du^2 \begin{Vmatrix} f'' & f' & g' \end{Vmatrix} + dv^2 \begin{Vmatrix} g'' & f' & g' \end{Vmatrix} = 0.$$

Il n'y a pas de terme en $du\,dv$; cela prouve que les lignes coordonnées forment un réseau conjugué [1].

7. *Trouver les lignes asymptotiques de la surface*

$$(1) \qquad x = u + v, \qquad y = u^2 + v^2, \qquad z = u^2 - v^2.$$

---

[1] Le rapport anharmonique de quatre tangentes définies par le rapport $m = \frac{du}{dv}$ est égal au rapport anharmonique des m, car le coefficient angulaire de la projection sur xOy, par exemple, est une fonction homographique de m.

Ces équations sont de la forme (2) de l'Exercice précédent. Nous avons donc affaire à une surface de translation. Les lignes génératrices sont des paraboles.

Pour avoir les lignes asymptotiques, appliquons l'équation (4) de l'Exercice précédent. Le calcul est très simple et donne

$$\frac{du^2}{u} + \frac{dv^2}{v} = 0. \tag{2}$$

ou

$$\frac{du}{\sqrt{u}} \pm \frac{dv}{\sqrt{-v}} = 0.$$

ou, en intégrant

$$\sqrt{u} \pm \sqrt{-v} = C = \text{const.}, \tag{3}$$

ou, en rendant rationnel,

$$(u+v)^2 - 2C^2(u-v) + C^4 = 0. \tag{4}$$

Si l'on remarque que $u - v = x$ et $u - v = \frac{z}{x}$, l'équation s'écrit

$$z = \frac{x(x^2+m^2)}{2m}, \tag{5}$$

en posant $m = C^2$.

Telle est l'équation de la projection des lignes asymptotiques sur le plan des zx.

Le lecteur pourra la retrouver (1) en partant de l'équation de la surface, qui peut s'écrire

$$y = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{z^2}{x^2}\right), \tag{6}$$

et utilisant l'équation de la note de la page 361 du *Cours*.

8. *Trouver les lignes de courbure de la surface*

$$z = xy. \tag{1}$$

On peut prendre pour paramètres directeurs de la normale

$$a = y, \qquad b = x, \qquad c = -1.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure s'écrit, dès lors

(1) En faisant le changement de variable $x^2 = \xi$, on aboutit à une équation homogène en z, ξ (t. I, n° 190).

(n° 346),

$$\begin{vmatrix} dx & dy & x\,dy + y\,dx \\ y & x & -1 \\ dy & dx & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant suivant la dernière colonne,

$$y^2\,dx^2 - x^2\,dy^2 + dx^2 - dy^2 = 0,$$

ou, enfin,

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \pm\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}. \tag{2}$$

Nous pouvons nous borner à prendre le signe + au second membre, quitte à changer y en $-y$, pour déduire la seconde famille de la première. En intégrant, nous obtenons

$$\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \log\left(y+\sqrt{1+y^2}\right) + \log C \qquad (C = \text{const.})$$

ou

$$x+\sqrt{1+x^2} = C\left(y+\sqrt{1+y^2}\right). \tag{3}$$

En chassant les radicaux, on trouve

$$4C(x-Cy)(y-Cx) + (1-C^2)^2 = 0. \tag{4}$$

Les lignes de courbure se projettent donc sur xOy suivant des hyperboles.

Si l'on tient compte de (1), l'équation (4) s'écrit aussi

$$x^2+y^2 - \frac{1+C^2}{C}z - \frac{(1-C^2)^2}{4C^2} = 0. \tag{5}$$

Donc, *nos lignes de courbure sont sur des paraboloïdes de révolution d'axe* Oz. (*Cf.* Exercice proposé n° 17 du Chap. XXXIV.)

EXERCICES PROPOSÉS.

1. On donne une surface (S), tangente en O à xOy et admettant pour tangentes principales en ce point Ox et Oy, les rayons de courbure principaux correspondants étant R_2 et R_1. Calculer les coordonnées du centre de courbure, relatif au point O, de la section par le plan (H),

d'équation

$$ux + vy + wz = 0.$$

Lieu de ce point, quand le plan (H) pivote autour d'une droite fixe. Même question, quand le plan (H) varie en faisant un angle constant avec Oz.

Cas où le point O est soit un ombilic, soit un point parabolique.

[Le premier lieu est une quartique gauche unicursale, située sur un cône de sommet O et de bases circulaires dans les plans parallèles à xOy. Le second lieu est une biquadratique unicursale, située sur un cône de révolution et un paraboloïde, d'axe commun Oz.]

2. On considère la courbe (courbe de Viviani) définie par l'intersection d'une sphère et d'un cylindre de révolution tangent à cette sphère et passant par son centre. Construire le centre de courbure de cette courbe en un quelconque de ses points, et, en particulier, en chacun de ses deux sommets. Déterminer les tangentes au point double, au moyen des indicatrices.

(*Cf.* Exercice résolu n° 1.)

3. Vérifier, au moyen du théorème de Meusnier, que les rayons de courbure d'une ellipse sont $\frac{b^2}{a}$ aux sommets du grand axe et $\frac{a^2}{b}$ aux sommets du petit axe.

(On considère l'ellipse comme projection d'un cercle, pour le petit axe, et comme se projetant suivant un cercle, pour le grand axe. *Cf.* Exercice résolu n° 2. *Cf.* n° 532.)

4. On reprend la surface (S) du n° 1. Trouver l'équation de la surface (Σ) engendrée par les cercles de Meusnier relatifs aux différentes tangentes en O. Calculer les rayons de courbure principaux de (Σ) au point $\left(0, \frac{R_2}{2}, \frac{R_2}{2}\right)$. Cas où $R_1 = 2R_2$.

[Pour la deuxième question, transporter l'origine au point de Oz, qui a pour cote $\frac{R_2}{2}$. Puis, couper par le nouveau plan des zx. Prendre les tangentes au point double et utiliser le théorème I du n° 342. Remarquer, enfin, que l'on connaît un des rayons de courbure cherchés, à savoir celui de la section par yOz.]

5. Déterminer l'indicatrice et les rayons de courbure principaux de la

surface

$$x^3 + y^3 + z^3 + \lambda xyz = 1,$$

en son point de rencontre avec Oz.

6. Appliquer l'Exercice résolu n° 4 à la section de la surface

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) - 4x^2 = 0$$

par le plan des xy.

7. Soit la surface

$$z = \frac{y^3 + xy^2 + \lambda x^3}{x + y} \qquad (\lambda = \text{const.}).$$

Étudier les variations de la courbure à l'origine de la section par le plan $y = mx$, quand m varie. On examinera, en particulier, les cas suivants :

$$\lambda = \frac{4}{3}, \qquad \lambda = -\frac{4}{9}.$$

(Extrait de la composition écrite du *Concours d'admission à l'École Normale supérieure*, en 1908.)

(*Cf.* Exercice résolu n° 5.)

8. Calculer les rayons de courbure principaux de la surface Σ de l'Exercice proposé n° 10 du Chapitre XIX, au point $(u = 0, v = 0)$

9. Trouver les lignes asymptotiques de la surface

$$x = u + v, \qquad y = u^2 + v^2, \qquad z = u^3 + v^3.$$

10. Trouver les lignes asymptotiques et les lignes de courbure de la surface

$$x = \cos u + \cos v, \qquad y = \sin u + \sin v, \qquad z = u + v.$$

[On prendra comme paramètres directeurs de la normale : $\sin\frac{u+v}{2}$, $\cos\frac{u+v}{2}$, $\cos\frac{u-v}{2}$. Pour les lignes de courbure, on intégrera par le changement de variables : $u - v = 2u'$, $u + v = 2v' = 2z$.]

11. Pour qu'une ligne C tracée sur une surface S soit ligne de cour-

bure, il faut et il suffit que chaque sphère osculatrice à C et tangente à S admette comme cercle limite (n° 281) un cercle de rayon nul. (Le plan du cercle limite est perpendiculaire à la tangente à la déférente.)

12. Démontrer que tous les points d'une surface développable sont des points paraboliques et réciproquement.

[Pour la réciproque, remarquer que les lignes asymptotiques sont en même temps lignes de courbure. Donc, leurs binormales ont une enveloppe. D'après la formule (19) du n° 329, ceci n'est possible que si ces lignes sont planes. Comme leur plan doit être tangent à la surface le long de chacune d'elles, la surface est une enveloppe de plans. *Cf.* N_{III}, n° 199.]

CHAPITRE XXIV.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE QUI CONDUISENT A DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Trajectoires orthogonales des coniques circonscrites à un rectangle* (É. P., 1913).

Prenons pour axes de coordonnées les axes du rectangle. Si les côtés ont pour longueur $2a$ et $2b$, l'équation générale des coniques considérées est (n° 307)

$$x^2 - a^2 + \lambda(y^2 - b^2) = 0$$

ou

$$\frac{x^2 - a^2}{y^2 - b^2} = -\lambda = \text{const.}$$

Leur équation différentielle est

$$(x^2 - a^2)y\,dy - (y^2 - b^2)x\,dx = 0.$$

En changeant dx en $-dy$ et dy en dx, on a l'équation différentielle des trajectoires orthogonales

$$(x^2 - a^2)y\,dx + (y^2 - b^2)x\,dy = 0$$

ou

$$\left(x - \frac{a^2}{x}\right)dx + \left(y - \frac{b^2}{y}\right)dy = 0.$$

Les variables sont séparées ; l'intégrale générale est [1]

$$x^2 + y^2 - 2(a^2 \log x + b^2 \log y) = C.$$

---

[1] Nous conseillons au lecteur de construire ces courbes, ainsi que celles des exercices suivants. Il pourra remarquer que la dérivée $\frac{dy}{dx}$ est déjà calculée avant l'intégration.

2. *Trajectoires orthogonales des ellipses de grandeur donnée, qui admettent pour axe une droite donnée.*

Prenons la droite donnée pour axe des x. Les ellipses proposées se déduisent, par translation suivant Ox, de la suivante :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{1}$$

Première méthode. — L'équation d'une quelconque de nos ellipses est

$$\frac{(x-\lambda)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (\lambda = \text{const.}). \tag{2}$$

Différentions et remplaçons, en même temps, dx par dy et dy par $-dx$; nous obtenons

$$\frac{(x-\lambda)\,dy}{a^2} - \frac{y\,dx}{b^2} = 0. \tag{3}$$

Éliminant λ entre (2) et (3), nous obtenons l'équation différentielle des trajectoires demandées, soit

$$a^2 y^2 dx^2 - b^2(y^2 - b^2)\,dy^2 = 0. \tag{4}$$

Les variables sont séparées, comme il fallait s'y attendre (n° 353), et une intégration facile nous donne pour équation générale des courbes cherchées

$$= \frac{a}{b}\,x = \sqrt{b^2 - y^2} + \frac{b}{2}\log\left(\frac{b - \sqrt{b^2 - y^2}}{b + \sqrt{b^2 - y^2}}\right) + \text{const.} \tag{5}$$

Deuxième méthode. — Les équations paramétriques de l'ellipse (2) sont (n° 329)

$$x = \lambda + a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi. \tag{6}$$

Si l'on applique la méthode du n° 352, on est conduit à l'équation différentielle

$$-a\sin\varphi\,dx + b\cos\varphi\,dy = 0$$

ou

$$a\sin\varphi\,d\lambda = (a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)\,d\varphi,$$

$$\lambda = \int\left(a - \frac{b^2}{a}\right)\sin\varphi\,d\varphi + \frac{b^2}{a}\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi} \tag{7}$$

$$= \left(-a + \frac{b^2}{a}\right)\cos\varphi + \frac{b^2}{a}\log\left(\tan\frac{\varphi}{2}\right) + \text{const.}$$

Portant dans (6), nous obtenons les équations paramétriques générales de nos trajectoires

$$(8)\qquad x=\frac{b^2}{a}\left(\cos\varphi+\log\left|\tan\frac{\varphi}{2}\right|\right)+\text{const.},\qquad y=b\sin\varphi.$$

Si l'on pose $\tan\frac{\varphi}{2}=e^t$, elles s'écrivent

$$(9)\qquad x=\frac{b^2}{a}(t-\operatorname{th}t)+\text{const.},\qquad y=\frac{b}{\operatorname{ch}t}.$$

Remarque. — Dans le cas particulier où $b=a$, c'est-à-dire lorsque les ellipses proposées sont des cercles, les équations (9) représentent des tractrices (n° 610), ayant pour asymptote Ox. Ceci pouvait se prévoir géométriquement, car les tangentes aux trajectoires cherchées ont toutes pour longueur a, quand on les limite à Ox. Chacune de ces trajectoires est donc une courbe aux tangentes égales (n° 610).

Lorsque $b\neq a$, les trajectoires sont des projections de tractrices.

3. *Trajectoires orthogonales des cercles de rayon constant, qui passent par un point fixe* O.

Première méthode. — Opérons en coordonnées polaires, conformément à la méthode générale du n° 353.

Si R désigne le rayon commun à tous nos cercles et ϑ l'angle polaire du centre de l'un d'eux, celui-ci a pour équation

$$(1)\qquad \rho=2\mathrm{R}\cos(\omega-\vartheta).$$

Les trajectoires cherchées sont définies par cette équation et la suivante :

$$(2)\qquad \frac{\rho\,d\omega}{d\rho}=-\frac{\partial}{\partial\omega}[\log\cos(\omega-\vartheta)]=\tan(\omega-\vartheta).$$

Si, entre ces deux équations, on élimine ϑ, on a

$$\frac{4\mathrm{R}^2}{\rho^2}=1+\frac{\rho^2\,d\omega^2}{d\rho^2};$$

d'où

$$(3)\qquad \pm\omega=\int\frac{\sqrt{4\mathrm{R}^2-\rho^2}\,d\rho}{\rho^2}=\sqrt{\frac{4\mathrm{R}^2}{\rho^2}-1}-\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{4\mathrm{R}^2}{\rho^2}-1}+\text{const.}$$

Telle est l'équation polaire générale des courbes cherchées.

Au lieu d'éliminer ϑ entre (1) et (2), on peut éliminer ρ. On obtient

ainsi, en différentiant logarithmiquement (1),

$$\operatorname{cotang}(\omega - \vartheta)\, d\omega = (d\vartheta - d\omega)\operatorname{tang}(\omega - \vartheta).$$

Posons $\omega - \vartheta = \varphi$. Cette équation devient

$$d\omega = -\operatorname{tang}^2\varphi\, d\varphi;$$

d'où

$$\omega = \varphi - \operatorname{tang}\varphi - \text{const.} \tag{4}$$

D'autre part, (1) nous donne

$$\rho = 2R\cos\varphi. \tag{5}$$

Les équations (4) *et* (5) *sont les équations paramétriques polaires de nos trajectoires.* On peut constater qu'elles vérifient l'équation (3). Leur construction a été proposée à l'Exercice n° 5 du Chapitre XVII.

Deuxième méthode. — Les équations cartésiennes paramétriques du cercle (1) sont

$$x = R(\cos\vartheta + \cos t), \qquad y = R(\sin\vartheta - \sin t). \tag{6}$$

Les trajectoires sont définies par l'équation différentielle

$$-\sin t\, dx + \cos t\, dy = 0$$

ou

$$dt - d\vartheta\cos(t - \vartheta) = 0. \tag{7}$$

Posons $t - \vartheta = \psi$; l'équation devient

$$d\psi + d\vartheta(1 + \cos\psi) = 0$$

ou

$$d\vartheta = -\frac{d\psi}{2\cos^2\frac{\psi}{2}}.$$

D'où

$$\vartheta = -\operatorname{tang}\frac{\psi}{2} + \text{const.} \tag{8}$$

Puis

$$t = \psi - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2} + \text{const.} \tag{9}$$

Portant dans (6), on aura *les équations paramétriques cartésiennes des trajectoires demandées.*

On retrouve d'ailleurs les équations (4) et (5), si l'on observe que

$$\omega = \frac{\theta - t}{2} = \frac{\psi}{2} - \tan\frac{\psi}{2} + \text{const.}, \qquad \rho = 2R\cos\frac{\theta - t}{2} = 2R\cos\frac{\psi}{2}.$$

Il suffit de poser $\frac{\psi}{2} = \varphi$.

4. *Trouver les courbes dont la tangente et la normale rencontrent* Ox *en deux points conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes* A *et* A'.

Prenons l'origine au milieu de ces deux points fixes et posons

$$\overline{OA} = -\overline{OA'} = a.$$

Première méthode. — L'équation de la tangente est

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy}.$$

Si nous y faisons $Y = 0$, nous obtenons l'abscisse du point de rencontre T avec Ox, soit

$$\overline{OT} = x - y\frac{dx}{dy}. \tag{1}$$

De même, l'équation de la normale

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy = 0$$

nous donne

$$\overline{ON} = x + y\frac{dy}{dx}. \tag{2}$$

La condition d'harmonie des segments AA' et TN s'écrit, comme on sait,

$$a^2 = \overline{OT}.\overline{ON} = \left(x - y\frac{dx}{dy}\right)\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = x^2 - y^2 + xy\left(\frac{dy}{dx} - \frac{dx}{dy}\right). \tag{3}$$

Telle est l'équation différentielle du problème. Elle se simplifie en posant

$$x^2 = u, \qquad y^2 = v \tag{4}$$

et devient

$$u - v + u\frac{dv}{du} - v\frac{du}{dv} - a^2 = 0. \tag{5}$$

Cette équation est linéaire par rapport à u et v et s'intègre par quadratures (*cf.* Exercice résolu n° 6 du Chapitre XV du Tome I). Résolvons-la par rapport à v :

$$v = uv' - a^2\frac{v'}{1 - v'}, \tag{6}$$

en posant $v = \frac{dv}{du}$. On reconnaît une équation de Clairaut (*loc. cit.*), dont l'intégrale générale est

$$v = Cu - a^2\frac{C}{1 - C} \qquad (C = \text{const.}) \tag{7}$$

ou, en revenant aux anciennes variables,

$$C(1 - C)x^2 - (1 - C)y^2 - a^2C = 0. \tag{8}$$

Cette équation représente une conique dont les axes sont Ox et Oy. Les carrés des demi-longueurs de ces derniers sont $\frac{a^2}{1 + C}$ et $-\frac{a^2C}{1 + C}$. Ils ont pour différence a^2, quelle que soit la constante C. *Les courbes cherchées sont donc les coniques de foyers* A *et* A', conformément à des propriétés bien connues (n° 516).

Deuxième méthode. — Cherchons la courbe par son équation tangentielle. Soit

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0 \tag{9}$$

l'équation de la tangente. L'équation de la normale est (n° 320)

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi - p' = 0. \tag{10}$$

En coupant ces deux droites par l'axe des x, on trouve

$$\overline{OT} = \frac{p}{\cos\varphi}, \qquad \overline{ON} = -\frac{p'}{\sin\varphi}. \tag{11}$$

L'équation différentielle du problème est donc

$$pp' = -a^2\sin\varphi\cos\varphi. \tag{12}$$

Elle s'intègre à vue et donne

$$p^2 = a^2\cos^2\varphi + C \qquad (C = \text{const.}). \tag{13}$$

Passons aux coordonnées tangentielles ordinaires (n° 292). Elles sont

liées aux coordonnées normales par

$$\frac{\cos\varphi}{u} = \frac{\sin\varphi}{v} = \frac{-p}{w}.$$

Comme l'équation (13) peut s'écrire sous la forme

$$p^2 = a^2\cos^2\varphi + C(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi),$$

homogène en p, $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, elle équivaut à

$$C(u^2 + v^2) + a^2u^2 - w^2 = 0. \tag{14}$$

On reconnaît là l'équation tangentielle générale des coniques de foyers A et A′ (n° 516).

3. *Trouver les courbes pour lesquelles il existe une relation linéaire entre la tangente limitée à* Oy *et la normale limitée à* Ox.

Soit la relation donnée

$$\overline{MN} = a.\overline{MT} + b \tag{1}$$

ou, en introduisant les coordonnées (x, y) du point M et l'angle polaire α de la demi-tangente positive,

$$-\frac{y}{\cos\alpha} = -a\frac{x}{\cos\alpha} + b,$$

$$y = ax - b\cos\alpha. \tag{2}$$

Différentions, en remplaçant dy par $dx\tan\alpha$,

$$dx(\tan\alpha - a) = b\sin\alpha\, d\alpha;$$

d'où, en posant $a = \tan\varphi$ et $\alpha - \varphi = \vartheta$,

$$x = b\int\frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\tan\alpha - a} = \frac{b\cos\varphi}{2}\int\frac{\sin(2\varphi + 2\vartheta)\, d\vartheta}{\sin\vartheta},$$

$$x = b\cos\varphi\left[\sin\varphi\cos\varphi\log\tan\frac{\vartheta}{2} + \sin(2\varphi + \vartheta)\right]. \tag{3}$$

Portant dans (2), on a

$$y = b\left[\sin^2\varphi\cos\varphi\log\tan\frac{\vartheta}{2} + \sin\varphi\sin(2\varphi + \vartheta) - \cos(\varphi + \vartheta)\right]$$

ou

$$y = b\cos\varphi\left[\sin^2\varphi\log\tan\frac{\theta}{2} - \cos(2\varphi - \theta)\right]. \tag{4}$$

Les équations (3) et (4) constituent les équations paramétriques d'une des courbes cherchées. Les autres s'en déduiraient par l'addition d'une constante arbitraire C à x et de la constante aC à y, c'est-à-dire *par une translation arbitraire de coefficient angulaire a*. Si le lecteur veut construire la courbe, il n'oubliera pas qu'il connaît déjà $\frac{dx}{d\theta}$ et $\frac{dy}{d\theta}$ et que l'angle polaire de la tangente est $\varphi - \theta$. Il pourra remarquer aussi que le rayon de courbure est $b\cos\varphi\,\frac{\sin(\theta+\varphi)}{\sin\theta}$.

6. *Trouver une courbe pour laquelle la tangente* MT *limitée à* Ox *soit proportionnelle à la distance* OM. *Cas où* MT = OM.

Soient (ρ, ω) les coordonnées polaires de M. On a

$$\overline{MT} = \frac{y}{\sin\alpha} = \frac{\rho\sin\omega}{\sin(\omega - V)}.$$

Si le rapport $\frac{MT}{OM} = \frac{1}{m}$, on a donc

$$\sin(\omega - V) + m\sin\omega = 0. \tag{1}$$

D'autre part,

$$\frac{d\rho}{\rho} = \operatorname{cotang} V\, d\omega. \tag{2}$$

La relation (1) nous donne V en fonction de ω. Portant dans (2), on a ρ par une quadrature.

Pratiquement, il n'est pas facile de calculer V en fonction de ω. Il est, au contraire, plus simple de calculer ω en fonction de V :

$$\tan\omega = -\frac{\sin V}{m - \cos V}. \tag{3}$$

Portant dans (2), il vient

$$\log\rho = -\int \operatorname{cotang} V\,\frac{1 - m\cos V}{1 - 2m\cos V + m^2}\,dV.$$

ou, en posant $\cos V = t$,

$$\log\rho = \int \frac{t(1+mt)}{(1-t^2)(1+2mt+m^2)}\,dt,$$

ou

$$\log\rho = -\frac{1}{2(m+1)}\log(t-1) + \frac{1}{2(m-1)}\log(t+1) + \frac{m(1+m^2)}{1-m^2}\log(1+m^2+2mt),$$

$$(4)\qquad \rho = \frac{(t+1)^{\frac{1}{2(m-1)}}}{(t-1)^{\frac{1}{2(m+1)}}}(1+m^2+2mt)^{\frac{m(1+m^2)}{1-m^2}}.$$

Les formules (3) et (4) nous donnent ω et ρ en fonction de V.

L'intégration qui précède suppose toutefois $m^2 \neq 1$. Voyons ce qu'elle devient pour $m^2 = 1$. Prenons, par exemple, $m = 1$ [1]. L'équation (3) s'écrit

$$\operatorname{tang}\omega = -\operatorname{tang}\frac{V}{2};$$

d'où

$$V = -2\omega.$$

Portant dans (2), on a ensuite

$$\log\rho = -\int \operatorname{cotang} 2\omega\, d\omega = -\frac{1}{2}\log\sin 2\omega + \text{const.}$$

$$\rho^2 \sin\omega\cos\omega = C,$$

ou, en passant en coordonnées cartésiennes,

$$(5)\qquad xy = C.$$

La courbe est une hyperbole équilatère, admettant les axes pour asymptotes. L'égalité OM = MT résulte alors des propriétés bien connues de la tangente à cette courbe (n° 541).

Dans ce cas particulier, on peut d'ailleurs arriver beaucoup plus rapidement à l'équation (5), en remarquant que la condition imposée peut s'écrire

$$x - y\frac{dx}{dy} = 2x$$

ou

$$x\,dy + y\,dx = d(xy) = 0.$$

---

[1] Prendre $m = -1$ reviendrait à augmenter V de π, ce qui ne changerait pas la courbe.

7. *Trouver deux courbes telles que les tangentes en deux points situés en ligne droite avec* O *se coupent à angle droit sur* Ox (E. P., 1913).

Soient (ρ, ω) et (r, ω) les coordonnées polaires des deux points associés M et M'. Si, dans l'équation de la tangente donnée au n° 259, on fait $\omega = 0$, on obtient la valeur de $\frac{1}{\overline{OT}}$. En égalant cette expression pour les deux courbes, on exprime que les tangentes MT et M'T se coupent sur l'axe polaire :

$$\frac{1}{\rho}\cos\omega - \left(\frac{1}{\rho}\right)'\sin\omega = \frac{1}{r}\cos\omega - \left(\frac{1}{r}\right)'\sin\omega. \tag{1}$$

La condition de perpendicularité s'écrit ensuite

$$\frac{\rho}{\rho'}\frac{r}{r'} = -1. \tag{2}$$

Il faut intégrer le système (1), (2).

Il paraît indiqué de faire le changement de variables

$$\frac{1}{\rho} = u, \qquad \frac{1}{r} = v. \tag{3}$$

Nos équations deviennent

$$(u - v)\cos\omega = (u' - v')\sin\omega, \tag{4}$$

$$u'v' + uv = 0. \tag{5}$$

La première s'intègre à vue :

$$u - v = C\sin\omega. \tag{6}$$

Pour ne pas détruire la symétrie, prenons pour inconnue auxiliaire $w = u + v$. Nous avons, en tenant compte de (6),

$$4uv = w^2 - C^2\sin^2\omega, \qquad 4u'v' = w'^2 - C^2\cos^2\omega.$$

Portant dans (5), il vient

$$w'^2 + w^2 = C^2,$$

équation dont l'intégrale générale est

$$w = C\sin(\omega + \varphi) \qquad (\varphi = \text{const.}), \tag{7}$$

mais qui admet, en outre, l'intégrale singulière

$$\omega = C. \tag{8}$$

Si l'on combine (6) et (7) par addition et soustraction, on obtient

$$u = \frac{1}{\rho} = C\cos\frac{\varphi}{2}\sin\left(\omega + \frac{\varphi}{2}\right), \qquad v = \frac{1}{r} = C\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(\omega + \frac{\varphi}{2}\right);$$

c'est-à-dire deux droites rectangulaires et se coupant sur Ox. Cette solution est banale et sans intérêt.

Si l'on combine (6) et (8), on obtient

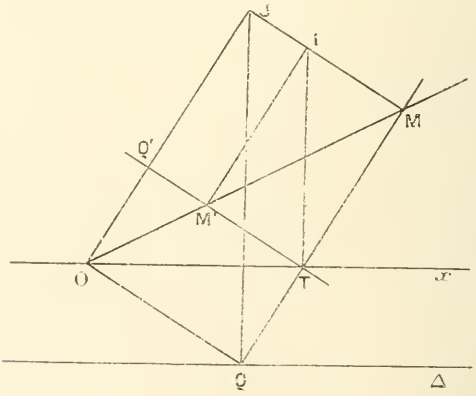
$$u = \frac{1}{\rho} = \frac{C}{2}(1 + \sin\omega), \qquad v = \frac{1}{r} = \frac{C}{2}(1 - \sin\omega); \tag{9}$$

c'est-à-dire (n° 520) *deux paraboles* de foyer O, d'axe Oy et symétriques l'une de l'autre par rapport à O.

Solution géométrique. — En s'appuyant sur les propriétés classiques de la parabole, il est facile de vérifier *a posteriori* ce résultat. Nous en laissons le soin au lecteur. Nous allons montrer plutôt comment on peut obtenir la solution directe par un raisonnement purement géométrique.

Considérons l'angle droit MTM′ comme une figure de forme invariable mobile dans le plan. D'après la propriété du centre instantané de rota-

Fig. 34.



tion (Chap. XXXIX, Exercice résolu n° 1), les normales aux lieux de M, M′, T sont concourantes en I (*fig.* 34). Projetons maintenant O en Q sur MT et appliquons la même propriété à l'angle droit OQM. La nor-

male en Q au lieu de Q doit passer par le point J. Or, les deux rectangles MIM'T, MJOQ sont homothétiques. Donc, QJ est parallèle à TI et la tangente en Q au lieu de Q est parallèle à Ox. Ceci ne peut être que si Q est fixe (solution banale constituée par les deux droites fixes QM et TM') ou bien décrit une droite Δ parallèle à Ox. Dans ce dernier cas, l'enveloppe de QM est une parabole II de foyer O et de tangente au sommet Δ. Le point Q' décrit la droite Δ' symétrique de Δ; donc, Q'M' enveloppe la parabole II' symétrique de II.

8. *Déterminer une courbe* (C), *sachant que le cercle décrit sur son rayon de courbure comme diamètre est orthogonal à un cercle fixe.*

Soit a le rayon du cercle fixe (Γ), dont nous prenons le centre pour origine. La condition imposée par l'énoncé s'écrit, avec nos notations habituelles,

$$x x_1 + y y_1 = a^2 \tag{1}$$

ou

$$x^2 + y^2 + \mathrm{R}(-x\sin\alpha + y\cos\alpha) = a^2. \tag{2}$$

La parenthèse est le premier membre de l'équation de la tangente. Cela nous incite à essayer de traiter le problème en coordonnées tangentielles normales. Soit

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = p \tag{3}$$

l'équation de la tangente, où p est une fonction inconnue de φ. Si l'on oriente la normale par l'angle polaire φ, on a

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \alpha, \qquad \alpha = \varphi - \frac{\pi}{2};$$

d'où

$$p = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Dès lors, (2) devient

$$x^2 + y^2 + \mathrm{R}p = a^2. \tag{4}$$

Or, on sait (n° 320) que $\mathrm{R} = -(p + p'')$. D'autre part, dérivons (3) :

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi = p'. \tag{5}$$

Elevons (3) et (5) au carré et ajoutons

$$x^2 + y^2 = p^2 + p'^2.$$

L'équation (4) s'écrit donc

$$p^2 + p'^2 - p(p + p'') = a^2$$

ou

$$p'^2 - pp'' = a^2. \tag{6}$$

On pourrait intégrer cette équation par la méthode générale du n° 195 (t. I). Il est plus rapide de procéder comme il suit. Dérivons-la :

$$p'p'' - pp''' = 0$$

ou

$$\frac{p'''}{p''} = \frac{p'}{p};$$

d'où

$$p'' = Cp \qquad (C = \text{const.}). \tag{7}$$

Premier cas : $C = 0$. — On a

$$p = A\varphi + B. \tag{8}$$

Portant dans (6), on trouve $A = a$. En outre, on peut supposer $B = 0$, en négligeant une rotation. Donc, $p = a\varphi$.

En résolvant (3), (5), on aurait les équations paramétriques de la courbe. Mais il est plus simple de remarquer que l'équation (5), qui est celle de la normale, devient

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi = a.$$

Elle nous montre que la normale enveloppe le cercle (Γ). Donc, la courbe (C) est une développante du cercle (Γ), courbe bien connue.

Cette solution particulière est évidente, *a posteriori*, l'orthogonalité des deux cercles ayant lieu au centre de courbure.

Deuxième cas : $C = -m^2 < 0$. — L'intégrale générale de (7) est, à une rotation près,

$$p = A\cos m\varphi.$$

Portant dans (6), on trouve $A = \frac{a}{m}$. D'où

$$p = \frac{a}{m}\cos m\varphi. \tag{9}$$

La courbe est une épi- ou hypocycloïde.

Troisième cas : $C = m^2 > 0$. — L'intégrale générale de (7) est

$$p = Ae^{m\varphi} + Be^{-m\varphi}.$$

Suivant que le produit AB est > 0, < 0 ou $= 0$, on peut, à une rotation ou à une symétrie près, se ramener à l'un des trois types :

$$(10) \qquad p = A \operatorname{ch} m\varphi, \qquad p = A \operatorname{sh} m\varphi, \qquad p = Ae^{m\varphi}.$$

En portant dans (6), on obtient, suivant le cas,

$$A^2 m^2 = -a^2, \qquad A^2 m^2 = a^2, \qquad 0 = a^2.$$

Le second type convient donc seul au cas où le cercle (Γ) est réel. Le premier type convient à un cercle (Γ) imaginaire pur et le troisième à un cercle (Γ) de rayon nul. Dans ce dernier cas, le problème posé revient au suivant : *Trouver une courbe dont le rayon de courbure est vu du point* O *sous un angle droit* ou encore *dont le centre de courbure soit l'extrémité de la sous-normale polaire*. On sait que la spirale logarithmique jouit de cette propriété (n° 613). Effectivement, si l'on prend la troisième solution (10); il est aisé de voir qu'elle conduit à une telle spirale qui est, par suite, la seule courbe jouissant de la propriété énoncée ci-dessus.

Nous laissons au lecteur le soin d'étudier les courbes des deux premiers types (10). Il pourra aussi reprendre complètement la question en coordonnées polaires. Il sera conduit à une équation à variables séparées entre ρ et V.

9. *Trouver les courbes gauches tracées sur un cylindre et dont le plan osculateur en chaque point est normal à ce cylindre ou bien les courbes gauches dont le rapport de la courbure à la torsion est constant* (réciproques des propriétés de l'hélice, n° 616).

1° La normale principale est constamment normale au cylindre. Elle est donc perpendiculaire à ses génératrices. D'autre part, elle est parallèle à la tangente à l'indicatrice (n° 323). Cette dernière courbe est donc plane [1]; comme elle est sphérique, c'est un cercle. Il s'ensuit que *les tangentes à la courbe cherchée font un angle constant* V *avec les*

---

[1] Si les tangentes à une courbe sont perpendiculaires à Oz, on a

$$dz = 0, \qquad z = \text{const.}$$

génératrices du cylindre (¹). Ceci s'exprime, en prenant Oz parallèle à ces génératrices, par

$$\frac{dz}{ds} = \cos V, \qquad z = s\cos V. \tag{1}$$

On a ensuite, en introduisant l'arc σ de la section droite du cylindre,

$$d\sigma^2 = ds^2 - dz^2 = ds^2(1 - \cos^2 V) = ds^2 \sin^2 V;$$

$$\sigma = s \sin V. \tag{2}$$

Par suite, $\frac{z}{\sigma} = \cot V = \text{const.}$ Donc, *la courbe cherchée est une hélice* (n° 615).

2° Soit $\frac{R}{T} = k$. D'après les formules de Frenet (n° 326), on a

$$\frac{da''}{da} = \frac{db''}{db} = \frac{dc''}{dc} = \frac{R}{T} = k;$$

d'où

$$a'' = ka + \alpha, \qquad b'' = kb + \beta, \qquad c'' = kc - \gamma, \tag{3}$$

α, β, γ désignant des constantes. Or, si l'on multiplie ces équations respectivement par a, b, c et qu'on les ajoute, on a

$$0 = k + a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

Ceci exprime que la tangente fait un angle constant avec la direction fixe de paramètres directeurs α, β, γ. On est donc ramené à 1° et *la courbe est encore une hélice.*

Remarque. — *Si la courbure et la torsion sont constantes,* leur rapport l'est aussi. On a donc une hélice. Mais, en outre, d'après la formule (32) du n° 616, la courbure de la section droite est constante. Cette section est donc un cercle ; on a une *hélice circulaire.*

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Trajectoires orthogonales des paraboles de grandeur et d'axe donnés ou bien de grandeur et de tangente au sommet données.

2. Trajectoires orthogonales d'une famille d'ellipses ou d'hyperboles homothétiques par rapport à leur centre ou par rapport à un sommet. Cas d'une famille de cercles.

(¹) Nous allons résoudre maintenant le problème qui consiste à *trouver toutes les courbes dont les tangentes font un angle constant avec une direction fixe.*

3. Trajectoires orthogonales des paraboles de foyer et d'axe donnés. [Coordonnées polaires.]

4. On fait tourner la courbe $\rho = \operatorname{tang}\omega$ autour du pôle. Trouver et construire les trajectoires orthogonales des courbes obtenues.

5. Vérifier, par un calcul direct, que la détermination des trajectoires orthogonales d'une famille de cercles ayant leurs centres en ligne droite se ramène à une quadrature. Application aux cas où les cercles sont tous égaux ou bien sont homothétiques de l'un d'entre eux par rapport à un point fixe.

6. On donne une courbe (D) par son équation en coordonnées polaires (r, θ). Trouver les trajectoires orthogonales des cercles qui ont leur centre sur (D) et qui passent par O.

[Les équations paramétriques polaires de ces trajectoires peuvent se mettre sous la forme

$$\rho = 2r\cos\frac{\psi}{2}, \qquad \omega = \theta - \frac{\psi}{2},$$

ψ étant donné par

$$\frac{1}{r}\operatorname{tang}\frac{\psi}{2} - \int\frac{d\theta}{r} = 0.]$$

7. Appliquer les résultats de l'Exercice précédent au cas où la courbe (D) est une spirale logarithmique.

[Les trajectoires se composent d'une spirale logarithmique et d'un réseau de courbes transcendantes, faciles à construire, se déduisant de l'une d'elles par homothétie ou rotation.]

8. Même question, quand la courbe (D) a pour équation

$$2r\sin\frac{\theta}{3}\sin\frac{2\theta}{3} = a.$$

Montrer que, parmi les trajectoires, il y a une parabole.

9. Trajectoires orthogonales des coniques ayant deux sommets donnés appartenant au même axe (É. P., 1913).

10. Trajectoires orthogonales des paraboles définies par l'équation générale

$$y = kx - x^2(1 + k^2).$$

[Ces paraboles sont les trajectoires d'un projectile lancé dans le vide,

sous différents angles, avec une vitesse initiale constante (t. III). Les courbes cherchées sont définies par l'équation proposée et la suivante :

$$dx + dy[t - 2x(1 + t^2)] = 0.$$

Poser $tx = u$, puis éliminer x^2 entre les deux équations. On obtient une équation linéaire en y, u, qui s'intègre par quadrature (t. I, n° 191), en posant, par exemple, $\frac{1 + 2u - 4y}{1 - 2u} = v$. On obtient des courbes algébriques. En posant $(2u - 1)(v + 2) = \lambda$, on peut exprimer rationnellement y et x^2 en fonction de λ.]

11. *Trajectoires sous un angle constant.* — On appelle ainsi les courbes qui coupent toutes les courbes d'une famille sous un angle constant V.

Montrer que la détermination des trajectoires d'une famille de droites sous un angle donné se ramène à une quadrature.

[Prendre, par exemple, les droites sous la forme

$$x = \alpha + \rho\cos\varphi, \qquad y = \beta + \rho\sin\varphi,$$

α et β étant des fonctions données de φ, qu'on pourra, plus particulièrement, prendre égales aux coordonnées du point de contact de la droite avec son enveloppe.]

12. Appliquer l'Exercice précédent au cas où les droites données sont tangentes à un cercle.

13. Montrer que la détermination des trajectoires d'une famille de cercles sous un angle donné se ramène à l'intégration d'une équation de Riccati. [Suivre la même marche qu'au n° 354.]

14. Appliquer l'Exercice précédent au cas où les cercles donnés sont tous égaux et ont leurs centres en ligne droite.

15. La tangente et la normale en M à une courbe (C) rencontrent respectivement Ox, Oy en T, T′ et en N, N′. Déterminer la courbe (C) pour que :

1° $NT = \text{const.}$;

2° $\frac{\overline{OT}}{\overline{ON}} = k = \text{const.}$ (cas de $k = -1$) ;

3° $\frac{\overline{MN}}{\overline{MN'}} = \text{const.}$;

4° $\dfrac{\overline{MT}}{\overline{MT'}} = \text{const.}$:

5° $\dfrac{1}{MN} - \dfrac{1}{MT} = \dfrac{1}{a} = \text{const.}$:

6° $\overline{OM}^2 = (m+1)^2\,\overline{MT}^2 - m^2\,\overline{MN}^2$ $\left(\text{cas de } m = -\dfrac{1}{2}\right)$.

(Pour 1°, 5° et 6°, introduire l'angle polaire α de la tangente. Pour 2°, introduire les coordonnées normales de la tangente. Pour 3° et 4°, introduire seulement x, y, dx, dy. Le lecteur pourra d'ailleurs essayer d'autres procédés, s'il le désire.)

16. Conservant les notations précédentes, on mène par T une parallèle à Oy. Elle rencontre MN en P. Déterminer la courbe (C), sachant que P décrit une courbe (Γ) donnée, quand M décrit (C). Démontrer que, si l'on considère deux courbes (C_1) et (C_2) répondant à la question, l'angle $\widehat{M_1TM_2}$ reste constant quand P décrit (Γ).

Étudier à part et jusqu'au bout les cas où la courbe (C) est :

1° Une droite parallèle à Ox :

2° Une ellipse admettant Ox pour axe et, plus particulièrement, un cercle ;

3° Une parabole d'axe perpendiculaire à Ox et, plus particulièrement, admettant Ox pour directrice ou pour droite homothétique de la directrice par rapport au sommet et dans le rapport 4.

[Soient (a, b) les coordonnées de P et α l'angle polaire de MT. On a

$$x = a + b\sin\alpha\cos\alpha, \qquad y = b\sin^2\alpha; \qquad \alpha = \int\frac{da}{b} + \varphi, \qquad \varphi = \text{const.}$$

Dans 1°, (C) est une cycloïde.

Dans 2°, lorsque (Γ) est un cercle, parmi les courbes (C) se trouve une hypocycloïde à quatre rebroussements.

Dans 3°, les courbes (C) comprennent un cercle tangent à Ox, dans le premier cas particulier, et une parabole tangente à Ox, dans le second cas particulier.]

17. On donne deux droites fixes parallèles D et D′ et un point O équidistant. La tangente en M à une courbe (C) rencontre D en T et D′ en T′. Déterminer cette courbe de manière que $\widehat{TOM} = \widehat{MOT'}$ (É. P., 1913).

[On trouve, outre les droites issues de O, les coniques du faisceau déterminé par (D, D′) et par le cercle de rayon nul, de centre O. La

propriété peut se vérifier géométriquement, en appliquant le théorème de Desargues (n° 505) à la droite TT'.]

18. Trouver les courbes telles que l'on ait

$$y = e^s \qquad (\text{É. P., 1913}).$$

19. Trouver les courbes pour lesquelles on a

$$s = e^{m\alpha} \qquad (\text{É. P., 1912}).$$

20. Trouver les courbes pour lesquelles on a, en coordonnées polaires,

$$V = m\omega.$$

Trouver leurs trajectoires sous un angle constant.
Valeurs de m qui conduisent à des courbes simples.

21. La normale en M à une courbe rencontre Ox en K et la perpendiculaire à OM en N. Déterminer la courbe de manière que $\frac{ON}{OK}$ soit constant (É. P., 1910).

22. Réciproque de l'Exercice proposé n° 2 du Chapitre XXXV.

23. Chercher les courbes définies par les équations intrinsèques :

$R = ms$ (spirale logarithmique); $R^2 + m^2 s^2 = 1$ (épi- ou hypocycloïde);

$$R^2 = m^2 s^2 = 1; \qquad R^2 = 2s; \qquad R = s^2 + 1 \text{ (chaînette)}.$$

24. Trouver les courbes dont la projection du rayon de courbure sur une droite fixe est constante.

25. Trouver les courbes dont le rayon de courbure est divisé dans un rapport constant par Ox. Cas particuliers intéressants.

[En projetant le rapport $\frac{MC}{MN} = m$ sur Oy, on a immédiatement l'équation différentielle qui relie α et y. On pourra examiner les cas de $m = \pm 1$ et ± 2.]

26. Trouver les courbes dont le rayon de courbure est proportionnel au carré de la normale limitée à Ox. Montrer que, parmi elles, se trouve une cubique unicursale (*cf.* n° 356, problème I).

27. Sur la tangente en M à une courbe (C), on porte une longueur

constante $MP = a$. Déterminer cette courbe de manière que, du point P, on voit sous un angle droit le segment de normale compris entre Ox et le centre de courbure. Montrer que si l'on projette P en Q sur Ox, MQ demeure constant, quand M décrit (C). Montrer que, parmi les courbes demandées, se trouve une tractrice.

28. Trouver les courbes dont le rayon de courbure est divisé dans un rapport constant par la sous-normale polaire. Cas particuliers intéressants.

[En projetant le rapport $\frac{MC}{MN}$ sur OM, on se ramène aux courbes de l'Exercice proposé n° 20.]

29. Trouver les courbes dont le rayon de courbure est proportionnel au carré de la normale limitée à la sous-normale polaire.

[Une des courbes a pour équation polaire $\rho = \frac{1}{\operatorname{th}\frac{\omega}{2}}$.]

30. Trouver les courbes dont le rayon de courbure est proportionnel au rayon vecteur. Dans le cas où il lui est égal, montrer que la projection du pôle sur la normale est à une distance constante du centre de courbure.

31. Trouver les courbes dont le rayon de courbure est proportionnel à ρ^m. Montrer que si $m \neq 2$, parmi les courbes cherchées se trouvent celles qui font l'objet de l'Exercice proposé n° 20.

32. Trouver les courbes dont le rayon de courbure est divisé dans un rapport constant par la projection d'un point fixe sur la normale (É. P., 1910). (*Cf.* Exercice résolu n° 8.)

33. Trouver les courbes dont le rayon de courbure est proportionnel à la puissance $m^{\text{ième}}$ de la distance de la tangente à un point fixe. Intégrer complètement dans le cas de $m = -3$. Dans chacun des cas $m = 2$ et $m = 3$, montrer qu'il y a deux courbes qui se calculent complètement par les fonctions élémentaires.

34. Trouver les courbes dont le rayon de courbure est proportionnel à la distance de la normale à un point fixe.

35. Trouver les courbes dont le rayon de courbure est lié à l'abscisse par l'une ou l'autre des relations

$$Rx^2 = 1, \qquad x = R^2, \qquad Rx = 1.$$

[Parmi les premières, se trouve la chaînette; parmi les secondes, se trouve la cycloïde.]

36. On considère une courbe (C) et le cercle (Γ) décrit sur le rayon de courbure en M comme diamètre.

1° Déterminer la courbe (C) sachant qu'elle passe à l'origine et que (Γ) est constamment tangent à Ox.

2° Trouver, dans ces conditions, le lieu (S) du centre I de (Γ).

3° Soit P la projection de I sur Ox. Montrer que arc OM = 2OP.

4° Montrer que les tangentes en M à (C) et en I à (S) se coupent sur Ox.

37. Démontrer les réciproques des diverses propriétés dont jouissent les courbes étudiées aux Chapitres XXXIX et XL.

38. Trouver toutes les hélices ou *lignes d'égale pente* qui peuvent être tracées sur une surface donnée.

Exemples : La surface est une sphère, un cylindre parabolique, un paraboloïde hyperbolique équilatère, un paraboloïde de révolution. Dans les deux derniers exemples, on ne cherchera que les hélices dont le cylindre rectifiant a ses génératrices parallèles à l'axe du paraboloïde.

[Si α, β, γ sont les cosinus directeurs des génératrices du cylindre rectifiant (ou de la verticale), on doit avoir

$$(1) \qquad (\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz)^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2)\cos^2 V.$$

En outre, l'équation de la surface donne $dz = p\,dx + q\,dy$. En portant dans (1), on a une équation différentielle en x, y.

Pour la sphère, prendre $\alpha = \beta = 0$ et des coordonnées polaires sphériques. Pour le cylindre $2z = x^2$, lorsque $\beta = \gamma = 0$, la projection sur yOz est une cycloïde. Pour le paraboloïde hyperbolique $z = xy$, on est ramené à l'équation $x\sin\alpha + y\cos\alpha = k = \text{const.}$, qui conduit à une équation linéaire en x entre x et α. Pour le paraboloïde de révolution, les projections sur le plan tangent au sommet sont des développantes de cercle.]

39. Si le plan normal d'une courbe passe par un point fixe O, cette courbe se trouve sur une sphère de centre O.

(On peut s'appuyer sur l'Exercice résolu n° 1 du Chapitre XIII.)

CHAPITRE XXV.

SURFACES DE RÉVOLUTION; HÉLICOÏDES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Surface gauche de révolution.*

C'est la surface engendrée par une droite B tournant autour d'une droite A. Prenons A pour axe des z et la perpendiculaire commune OP pour axe des x. Si $\overline{OP} = a$, les équations de B sont de la forme

$$x = a, \qquad y = z \tang \varphi. \tag{1}$$

Les équations d'un parallèle sont, d'autre part,

$$x^2 + y^2 = \lambda, \qquad z = \mu, \tag{2}$$

avec la condition de rencontre

$$a^2 + \mu^2 \tang^2 \varphi = \lambda. \tag{3}$$

Éliminant λ et μ entre (2) et (3), nous avons l'équation de la surface

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{a^2 \cot^2 \varphi} - 1 = 0. \tag{4}$$

On reconnaît l'équation d'un *hyperboloïde à une nappe* (n° 519). La méridienne du plan des zy est une hyperbole admettant pour asymptotes la parallèle à B menée par O et la droite symétrique par rapport à Oz. Le parallèle minimum, décrit par P, s'appelle *cercle de gorge*.

On peut avoir les équations paramétriques de la surface en posant

$$\mu \tang \varphi = a \tang u, \qquad r = \sqrt{\lambda} = \frac{a}{\cos u}. \tag{5}$$

Les équations sont alors

$$x = \frac{a \cos v}{\cos u}, \qquad y = \frac{a \sin v}{\cos u}, \qquad z = a \cot \varphi \tang u. \tag{6}$$

2. *Tore* (*cf.* n° 589).

C'est la surface engendrée par un cercle tournant autour d'une droite de son plan et constituant, par conséquent, la méridienne. L'axe de révolution étant encore pris pour axe des z, soit

$$(1) \qquad (x-a)^2+z^2-R^2=0$$

l'équation de la méridienne du plan des zx. On a l'équation du tore en y remplaçant x par $\sqrt{x^2+y^2}$.

Cela donne, en isolant au préalable le terme $2ax$ et élevant au carré,

$$(2) \qquad (x^2+y^2+z^2+a^2-R^2)^2-4a^2(x^2+y^2)=0.$$

En utilisant les équations paramétriques du cercle générateur

$$(3) \qquad r=a+R\cos u, \qquad z=R\sin u,$$

on a les équations paramétriques du tore :

$$(4) \quad x=(a+R\cos u)\cos v, \qquad y=(a+R\cos u)\sin v, \qquad z=R\sin u.$$

3. *Loxodromies de la sphère.* — Prenons pour coordonnées d'un point sur la sphère de rayon 1 sa longitude φ et sa colatitude θ. Si une courbe coupe tous les méridiens sous l'angle constant V, on a, d'après la première équation (16) du n° 365,

$$d\theta^2=(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)\cos^2 V$$

ou

$$d\varphi=\pm\tang V\frac{d\theta}{\sin\theta}.$$

Nous pouvons ne prendre que le signe +, en négligeant une symétrie par rapport à zOx. Nous pouvons également, à une rotation près autour de Oz, négliger la constante d'intégration. Cela nous donne

$$(1) \qquad \varphi=\tang V\log\tang\frac{\theta}{2}$$

ou

$$(2) \qquad \tang\frac{\theta}{2}=e^{\varphi\cot V}.$$

Remarque. — La projection stéréographique (*cf.* Chap. XXVIII, Exercice résolu n° 9) de la courbe sur xOy, à partir du point $(0, 0, -1)$,

a pour équation polaire

$$\rho = e^{\omega \cot V}. \tag{3}$$

C'est une spirale logarithmique (n° 613), comme cela était à prévoir, puisque cette projection doit couper tous les rayons vecteurs sous l'angle V.

4. *Lignes asymptotiques du tore.* — On pourrait appliquer l'équation (14) du n° 364. Nous préférons suivre la méthode directe suivante.

Partons des équations (4) de l'Exercice n° 2.

La normale en M au tore est le rayon du cercle générateur; ses cosinus directeurs sont les coefficients de R dans x, y, z, soit

$$\alpha = \cos u \cos v, \qquad \beta = \cos u \sin v, \qquad \gamma = \sin u. \tag{1}$$

Nous avons les formules

$$x = a\cos v + \mathrm{R}\alpha, \qquad y = a\sin v + \mathrm{R}\beta, \qquad z = \mathrm{R}\gamma. \tag{2}$$

L'équation (32) du n° 345 s'écrit, grâce à elles,

$$a\,dv(-d\alpha\sin v + d\beta\cos v) + \mathrm{R}(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2) = 0. \tag{3}$$

Or, la seconde parenthèse est l'élément linéaire de la sphère de rayon 1 ; elle est donc égale à $du^2 + \sin^2 u\,dv^2$. Quant à la première, son calcul est très simple à partir de (1); on trouve qu'elle est égale à $\cos u\,dv$. Finalement, l'équation (3) devient

$$a\cos u\,dv^2 + \mathrm{R}(du^2 + \sin^2 u\,dv^2) = 0.$$

On en tire, en négligeant les rotations et symétrie (1),

$$v = \int_{\frac{\pi}{2}}^{u} \frac{du}{\sqrt{-\cos u\left(\frac{a}{\mathrm{R}} + \cos u\right)}}. \tag{4}$$

Si $\frac{a}{\mathrm{R}} > -1$, cette quadrature introduit des fonctions elliptiques. Mais, il n'est pas besoin de connaître ces fonctions pour étudier la courbe.

---

(1) L'intégrale a un sens, car, pour $u = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, la quantité sous le signe $\int$ devient infinie comme $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ (t. I, n° 154).

Pour la réalité du radical, $\cos u$ doit être compris entre o et $-\frac{a}{R}$. Donc, les lignes asymptotiques sont entièrement *sur la partie interne du tore*. Cela était, du reste, à prévoir, car, sur la partie externe, les rayons de courbure principaux ont le même signe et les tangentes asymptotiques sont imaginaires (n° 336).

Laissons de côté le cas $a < R$ du tore à points doubles.

Avec l'hypothèse $a > R$, u peut varier de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$. Lorsque u croît de $\frac{\pi}{2}$ à π, v croît de zéro à une certaine valeur v_1 et M décrit l'arc M_0M_1. Puis, lorsque u croît de π à $\frac{3\pi}{2}$, l'élément différentiel reprend symétriquement les mêmes valeurs que précédemment. On en conclut que les valeurs v' que prend v se déduisent des précédentes par la formule

$$v' - v_1 = v_1 - v \qquad \text{ou} \qquad v' = 2v_1 - v.$$

Le nouvel arc de courbe résulte du premier par une symétrie par rapport à leur extrémité commune M_1.

Pour $u = \frac{3\pi}{2}$, on arrive, de la sorte, au point M_2, sur le parallèle le plus bas. Ensuite, pour la réalité du radical, u doit décroître de $\frac{3\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, et, si l'on veut ne pas revenir sur ses pas, il faut changer le signe du radical. L'élément différentiel reprend alors encore une fois les mêmes valeurs que précédemment et le point M décrit un arc $M_2M_3M_4$ symétrique de $M_2M_1M_0$ par rapport au plan méridien qui passe par M_2. Arrivé en M_4, on change de nouveau le signe du radical et l'on commence un nouvel arc $M_4M_5M_6M_7M_8$, qui se déduit de $M_0M_1M_2M_3M_4$ par une rotation de l'angle $4v_1$.

En définitive, une ligne asymptotique est constituée par une sorte de guirlande, qui chemine sur la partie interne du tore et qui s'enroule indéfiniment ou qui se ferme, suivant que $\frac{v_1}{\pi}$ est incommensurable ou commensurable. Pour la connaître complètement, il suffit d'étudier un quart de boucle tel que M_0M_1.

Cherchons la tangente en M. Elle nous est donnée par l'angle V (n° 365) :

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{tang} V = \frac{(a + R\cos u)}{R}\frac{dv}{du} = \sqrt{\frac{\frac{a}{R} + \cos u}{-\cos u}}.$$

Au point M_0, $\tan V = \infty$, $V = \frac{\pi}{2}$; la courbe est tangente au parallèle.

Au point M_1, $\tan V = \sqrt{\frac{a}{R} - 1}$.

Si l'on veut des données plus précises, il faut calculer l'intégrale (4), par la méthode des trapèzes, par exemple. Nous avons fait le calcul pour $a = 2R$ et obtenu le Tableau ci-dessous, où u et v sont en grades (1) :

u	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
v	0	37,2	53,4	66,3	77,7	88,5	98,8	108,9	118,9	128,9	138,9

On voit qu'à partir de $u = 160$, v est pratiquement une fonction linéaire de u. Le quart de période $v_1 = 138^g,9$. La période complète est donc $555^g,6$, soit environ 1 circonférence $\frac{3}{8}$. La tangente au point M_1 fait 45° avec xOy, car la formule (5) donne $\tan V_1 = 1$.

3. *Géodésiques d'une surface de révolution.* — Considérons, au point M, le trièdre trirectangle MXYZ défini par :

MX, demi-tangente positive à la méridienne, α, u;

MY, demi-tangente positive au parallèle, $\frac{\pi}{2}$, $u + \frac{\pi}{2}$;

MZ, demi-normale positive à la surface, $\alpha - \frac{\pi}{2}$, u;

les nombres au bout de chaque ligne sont, le premier, la colatitude, le second, la longitude.

Cela posé, soit une ligne géodésique G (*cf. Cours*. note de la page 360), dont la tangente MT est définie par $(\widehat{MX, MT}) = V$. La normale principale

(1) On ne peut pas appliquer la méthode des trapèzes au début, puisque la fonction sous le signe $\int$ devient infinie. Nous avons calculé la valeur de v pour 110^g, en remplaçant cette fonction par l'expression asymptotique $\frac{1}{\sqrt{t(2-t)}}$, en posant $t = u - \frac{\pi}{2}$.

est normale à la surface; nous la prendrons suivant MZ. La binormale MB est alors définie, dans le plan MXY, par $(\widehat{MX, MB}) = V - \frac{\pi}{2}$.

Les vecteurs unitaires de MT et de MB ont pour composantes, sur MX et MY : $\cos V$, $\sin V$, pour MT; $\sin V$, $-\cos V$, pour MB. Les cosinus directeurs de MT sont :

$$(1)\qquad \begin{cases} a = \cos V \sin\alpha\cos u - \sin V \sin u, \\ b = \cos V \sin\alpha \sin u + \sin V \cos u, \\ c = \cos V \cos\alpha. \end{cases}$$

Ceux de MB s'en déduisent en changeant V en $V - \frac{\pi}{2}$; il est inutile de les écrire; nous les désignerons, comme d'habitude, par a'', b'', c''.

Pour exprimer que G est une géodésique, il nous suffit d'écrire que l'on a

$$(2)\qquad a''\frac{da}{ds} + b''\frac{db}{ds} + c''\frac{dc}{ds} = 0$$

ou

$$(3)\qquad \mathrm{S}a''\left(\frac{\partial a}{\partial V}\frac{dV}{ds} + \frac{\partial a}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{ds} + \frac{\partial a}{\partial u}\frac{du}{ds}\right) = 0.$$

Les dérivées $\frac{\partial a}{\partial V}$, $\frac{\partial b}{\partial V}$, $\frac{\partial c}{\partial V}$ se déduisent de a, b, c en changeant V en $V + \frac{\pi}{2}$; elles sont donc égales à $-a''$, $-b''$, $-c''$ et le coefficient de $\frac{dV}{ds}$ dans (3) est -1. Puis, $\frac{\partial a}{\partial u} = -b$, $\frac{\partial b}{\partial u} = a$; le coefficient de $\frac{du}{ds}$ est donc

$$ab' - ba' = -c' = -\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha.$$

Enfin, le coefficient de $\frac{d\alpha}{ds}$ est

$$\cos\alpha\cos V(a''\cos u + b''\sin u) - \sin\alpha\cos V c''.$$

Comme $a''\cos u + b''\sin u = \sin\alpha\sin V = c''\tan\alpha$, ce coefficient est identiquement nul. Finalement, l'équation (3) s'écrit

$$(4)\qquad -\frac{dV}{ds} - \sin\alpha\frac{du}{ds} = 0.$$

Or, d'après les formules (16) du n° 365, on a

$$\frac{du}{ds} = \frac{\sin V}{r}. \tag{5}$$

D'autre part, en passant par l'arc de méridienne, on a

$$\sin\alpha = \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{d\tau} = \frac{dr}{ds}\frac{1}{\cos V}.$$

Portant dans (5), il vient

$$\frac{dV}{ds} - \frac{dr}{ds}\frac{1}{\cos V}\frac{\sin V}{r} = 0$$

ou

$$\frac{d(r\sin V)}{ds} = 0;$$

$$r\sin V = C = \text{const.} \tag{6}$$

Cette equation porte le nom de *formule de Clairault*. On en déduit la suivante, en utilisant (5) :

$$r^2\,du = C\,ds. \tag{7}$$

En raisonnant comme au n° 364, on en déduit que *les géodésiques d'une surface de révolution s'obtiennent toutes par quadratures.*

Lorsque la constante C est nulle, on a $V = 0$; on obtient les méridiennes, qui sont bien des géodésiques, car leur plan coupe normalement la surface en chacun de leurs points.

6. *Une vis a un pas de* 30^{mm} *et un noyau de* 150^{mm} *de diamètre. Son profil est un triangle équilatéral.*

1° *Calculer l'angle que fait la normale au filet avec le plan du profil et étudier comment il varie.*

2° *Construire les sections du filet par des plans parallèles au plan du profil et distants de ce dernier de* 10^{mm}, 20^{mm} *et* 30^{mm}.

Appelons R le rayon du noyau et h la hauteur du profil, celle-ci étant liée au pas [1] par la formule

$$p = \frac{2h}{\sqrt{3}}, \qquad h = p\frac{\sqrt{3}}{2} = 26^{mm}. \tag{1}$$

---

[1] On suppose que la vis est une *vis à un filet*, c'est-à-dire que sur une longueur de noyau égale au pas est enroulé un seul filet, de sorte que le pas est égal à BC.

Le point M situé à la distance horizontale u du sommet A décrit l'hélice (¹) :

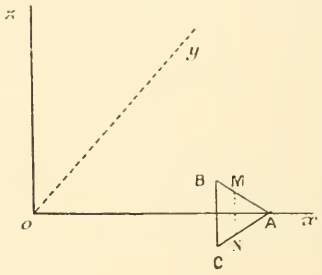
$$(2)\quad x = (R + h - u)\cos\omega,\qquad y = (R + h - u)\sin\omega,\qquad z = \varepsilon\frac{u}{\sqrt{3}} + k\omega,$$

ε étant égal à $+1$ ou à -1, suivant que M est pris sur le côté AB ou sur le côté AC (*fig.* 35) et k étant égal à

$$(3)\qquad k = \frac{p}{2\pi} = 4{,}78,$$

si ω est évalué en radians.

Fig. 35.



1° Les cosinus directeurs de la normale en M sont déterminés par les conditions

$$(4)\qquad \begin{cases} r(-a\sin\omega + b\cos\omega) + kc = 0 \\ -a\cos\omega - b\sin\omega + c\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{3}} = 0 \end{cases} \qquad (r = R + h - u)$$

qui, pour $\omega = 0$, se réduisent à

$$(5)\qquad c = -\frac{r}{k}b,\qquad a = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\frac{r}{k}b.$$

En écrivant que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, on trouve

$$(6)\qquad b^2 = \frac{3k^2}{3k^2 + 4r^2}.$$

Orientons notre normale *vers l'extérieur du filet*. En prenant un point M′ intérieur à ABC et sur le même rayon que M, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ doit

(¹) Les axes sont indiqués sur la figure 35; ils sont *à droite* ou *à gauche*, suivant que la vis est à droite ou à gauche (n° 618).

avoir une projection négative sur la normale. On en conclut que a doit être positif, et, par suite, b doit avoir le signe contraire à ε, d'après (5). Nous avons donc

$$b = \frac{-k\varepsilon}{\sqrt{k^2 - \frac{4r^2}{3}}}. \tag{7}$$

On en conclut que *les normales le long de* AC *sont*, par rapport au plan du profil, *du même côté que* Oy; *les normales le long de* AB *sont du côté opposé*. Aux deux points symétriques M, N (*fig.* 35), elles font d'ailleurs le même angle φ, en valeur absolue, avec le plan ABC. Cet angle est donné par la formule

$$\sin\varphi = \frac{k}{\sqrt{k^2 + \frac{4r^2}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{k}{r}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3k^2}{4r^2}}}. \tag{8}$$

Lorsque M parcourt AB, r diminue depuis $R + h$ jusqu'à R; donc φ augmente de φ_A à φ_B.

Pratiquement, le nombre $\frac{3k^2}{4r^2}$ est très petit et l'on peut prendre, sans erreur appréciable,

$$\varphi = \frac{90k\sqrt{3}}{r\pi} = \frac{90p\sqrt{3}}{2\pi^2 r} = \frac{230}{r}, \tag{9}$$

r étant évalué en millimètres et φ en degrés. On trouve ainsi

$$\varphi_A = 2^\circ 17', \qquad \varphi_B = 3^\circ 4'. \tag{10}$$

2° Coupons le filet par le plan $y = \zeta$. Nous avons, entre u et φ, la relation

$$\zeta = (R + h - u)\sin\varphi = r\sin\varphi. \tag{11}$$

Tirons-en φ et portons dans les deux autres équations (2) :

$$x = \sqrt{r^2 - \zeta^2}, \qquad z = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}u + k\arcsin\frac{\zeta}{r}. \tag{12}$$

Telles sont les équations paramétriques de la section, où u doit varier de 0 à 26 et r de 101 à 75. Rien ne serait plus facile, en les utilisant, que de construire les sections demandées. Mais, pratiquement, il est plus simple et suffisamment exact de remarquer que $\frac{\zeta}{r}$ et k sont petits

et de remplacer les formules (12) par les suivantes, obtenues en prenant les premiers termes des développements en série :

$$x = r - \frac{\beta^2}{2r}, \qquad z = \frac{k\beta}{r} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}u. \tag{13}$$

En comparant avec le calcul exact fait pour $\beta = 30$, $r = 75$, c'est-à-dire pour la plus grande valeur de $\frac{\beta}{r}$, on constate que l'erreur commise sur x et sur z est toujours inférieure à $0,2$. Avec ces formules approchées, les sections sont des arcs d'hyperbole, faciles à construire.

On peut encore simplifier davantage et obtenir des droites, en développant (13) suivant les puissances de u et s'arrêtant au premier degré :

$$\begin{cases} x = 101 - \dfrac{\beta^2}{202} - u\left[1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\beta}{101}\right)^2\right], \\ z = 0,0473 \times \beta + u\left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{3}} + \beta \times 0,00047\right). \end{cases} \tag{14}$$

L'erreur maximum est alors de $0,7$ sur x et $0,2$ sur z.

Remarque. — Le tracé des sections ci-dessus serait utilisé pour construire le profil des dents d'une roue à vis sans fin, qui engrènerait avec la vis proposée.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Soient les deux droites

$$x - y + 2z + 1 = 0, \qquad 2x + 3y - z - 2 = 0;$$
$$-x + 2y - 4 = 0, \qquad 4x + y + 2z = 0.$$

On fait tourner la seconde autour de la première. Calculer l'équation de la surface engendrée.

2. Trouver l'équation de la surface engendrée par le cercle

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad u(x - a) + vy + wz = 0$$

en tournant autour de Oz. Condition pour que la surface se décompose.

[L'équation est de la forme $f(\Sigma, z) = 4a^2R^2z^2$, f désignant un trinome homogène du second degré et $\Sigma = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - R^2$. La

condition de décomposition s'obtient en écrivant que f est carré parfait. Le résultat est évident géométriquement.]

3. Une courbe algébrique C de degré m tourne autour d'une droite A. Quel est le degré de la surface engendrée? Cas d'abaissement. Cas de $m = 2$.

(Couper par une droite D quelconque en utilisant, comme surface auxiliaire, la surface engendrée par D en tournant autour de A. Il y a abaissement quand chaque plan perpendiculaire à A coupe C en deux ou plusieurs points équidistants de A.)

4. Soient deux cercles C et C′ ayant même axe et, sur cet axe, deux points M et M′ qui décrivent deux divisions homographiques. Trouver le lieu du cercle d'intersection des sphères (C, M) et (C′, M′). Cas de dégénérescence.

(Prendre l'axe des cercles pour axe des z et le centre de la sphère S qui les contient tous deux pour origine. On obtient une équation du second degré en S et z. Pour avoir les cas de dégénérescence, on peut écrire que le discriminant du trinome en S, qui est lui-même un trinome en z, est carré parfait.)

5. Étant donnée la cyclide

$$(x^2 + y^2 - z^2)^2 + f(x, y, z) = 0,$$

où f désigne un polynome du second degré en x, y, z, montrer que la condition nécessaire et suffisante, pour qu'elle soit de révolution, est que la quadrique $f = 0$ soit de révolution autour d'un axe passant à l'origine. Pousser les calculs jusqu'au bout dans l'hypothèse où f ne renferme pas de termes rectangles.

6. Soient une surface de révolution S d'axe A et une courbe C′ tangente à un parallèle P de S. On fait tourner C′ autour de A et l'on obtient une surface S′. Quelle condition doit remplir C′ vis-à-vis de S pour que S′ soit tangente à S tout le long de P? (Cas d'exception d'un théorème du n° 362.)

(S'appuyer sur une construction donnée au n° 363. L'axe de courbure de C′ doit passer par le centre de la sphère inscrite le long de P.)

7. Soit une surface de révolution S d'axe A et une droite quelconque B. De chaque point M de B, on abaisse une normale MP sur la section de S par le plan mené par M perpendiculairement à B. Le lieu du point P est une certaine courbe C, qu'on fait ensuite tourner autour de B. Montrer

que la surface S′ ainsi engendrée est tangente à S le long de C. Les droites A et B étant seules données, peut-on choisir S et S′ de manière que C soit une droite? Quel est alors le lieu des différentes positions que peut occuper cette droite?

(Le lieu de C est un conoïde de Plücker.)

8. Trouver les loxodromies du cône, du paraboloïde, de l'ellipsoïde et des hyperboloïdes de révolution.

9. Même question pour le tore. Calculer l'équation polaire de la projection sur le plan de l'équateur xOy. Montrer que chaque loxodromie se trouve sur un cône ayant pour sommet O et pour base, dans un plan parallèle à xOy, une polaire réciproque d'épicycloïde ou d'hypocycloïde (¹) : Cas où $\cos V = \frac{R}{a}$.

[L'équation polaire de la base du cône dans le plan de cote h est donnée par la formule $\rho = r\frac{h}{z}$, facile à établir géométriquement. Lorsque $\cos V = \frac{R}{a}$, on obtient les cercles de Villarceau (n° 389). *Cf.* Chap. XXXVIII, Exercice proposé n° 38.)]

10. Trouver les lignes asymptotiques de la surface de révolution engendrée par une parabole tournant autour de sa tangente au sommet.

11. Même question, la méridienne dans le plan des zx ayant pour équation $z = x^m$ ou $\log x$.

12. Montrer que la surface de révolution qui a pour méridienne la courbe

$$z = \int \sqrt{\frac{1 - k^2 + x^2}{k^2 - x^2}}\, dx$$

est applicable (n° 400) sur la sphère de rayon 1. Construire la méridienne pour $k = \frac{1}{2}$ et pour $k = 2$.

(Poser $r = k \sin u$, $\theta = \frac{v}{k}$, avec les notations du n° 365.)

(¹) *Cf.* une Note de l'auteur dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, mars 1907.

13. Trouver les géodésiques du paraboloïde de révolution

$$2z = x^2 + y^2.$$

[Si C est la constante de Clairault (Exercice résolu n° 5), on a

$$r = \frac{C}{\sqrt{\sin^2\varphi - C^2\cos^2\varphi}}, \qquad \theta = \varphi + \frac{C}{2}\log\left(\frac{\operatorname{tang}\varphi - C}{\operatorname{tang}\varphi + C}\right).]$$

14. Même question pour le cône de révolution.

15. Trouver, sur la sphère, les courbes qui coupent les méridiens sous un angle proportionnel à la longitude. (*Cf.* Chap. XXIV, Exercice proposé n° 20.)

16. L'axe d'une surface de révolution étant vertical, trouver les lignes d'égale pente. Appliquer à la sphère, au paraboloïde et au cône.

17. Trouver les lignes asymptotiques de la surface de vis à filet triangulaire. (*Cf.* Exercice résolu n° 6.)

(Les projections horizontales sont des spirales hyperboliques. Prendre le troisième paramètre directeur de la normale égal à 1.)

18. Calculer l'angle des deux flancs du filet de la vis de l'Exercice résolu n° 6.

19. On considère l'hélicoïde engendré par les tangentes à une hélice (hélicoïde développable). Construire sa section par un plan passant par l'axe. Quelle est la nature de la section par un plan perpendiculaire à l'axe?

CHAPITRE XXVI.

SURFACES RÉGLÉES, DÉVELOPPABLES; CONES ET CYLINDRES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Soit la surface réglée* S, *engendrée par la droite* G :

$$x = tz + t^2, \qquad y = t^2 z + t. \tag{1}$$

1° *Cône directeur et sections par les plans de coordonnées.*

2° *Équations du plan tangent, du plan asymptote, du plan central; coordonnées du point central.*

3° *Équations ponctuelle et tangentielle de la surface.*

4° *Contours apparents sur les plans de coordonnées et sur un plan quelconque parallèle à* Oz. *Cône circonscrit de sommet* O.

5° *Montrer que les génératrices s'appuient sur deux droites fixes.*

6° *Lignes asymptotiques.*

1° La parallèle à G menée par O a pour équations :

$$x = tz, \qquad y = t^2 z. \tag{2}$$

En éliminant t, on a l'équation du *cône directeur* :

$$x^2 = yz. \tag{3}$$

C'est un cône du second degré facile à identifier.

Section par xOy. — Il suffit de faire $z = 0$ dans (1) et l'on obtient la parabole $x = y^2$.

Section par zOx. — Si l'on fait $y = 0$ dans (1), on a

$$z = -\frac{1}{t}, \qquad x = t^2 - 1 = \frac{1}{z^2} - 1;$$

cubique facile à construire.

Section par yOz. — En faisant $x = 0$, on trouve de même la cubique $y = z^3 - z$.

2° L'équation du *plan tangent* est (n° 367)

$$\begin{vmatrix} X - tz - t^2 & Y - t^2 z - t & Z - z \\ t & t^2 & 1 \\ z + 2t & 2tz + 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, tous calculs faits,

$$(4)\quad X(2tz+1) - Y(z+2t) + Z(2t^3 - t^2 z - t) - 2t^3 z + tz + t^2 = 0.$$

Le *plan asymptote* s'obtient en annulant le coefficient de z :

$$(5)\qquad 2tX - Y - t^2 Z - 2t^3 + t = 0.$$

Écrivons maintenant que les plans (4) et (5) sont perpendiculaires; nous obtenons le z du point central. En portant dans (4), on a l'équation du *plan central :*

$$\begin{aligned} &X(4t^6 - t^4 - 4t^2 + 1) - Y(4t^5 + 7t^3 - 2t) \\ &\quad + Z(8t^5 + 2t^3 - t) - 4t^8 + 5t^6 + 11t^4 - 3t^2 = 0. \end{aligned}$$

Tous les coefficients sont divisibles par $4t^2 - 1$; après suppression de ce facteur, il reste l'équation

$$(6)\quad X(t^4 - 1) - Yt(t^2 + 2) + Zt(2t^2 + 1) + t^2(-t^4 + t^2 + 3) = 0.$$

En portant z dans (1), on a les coordonnées du *point central :*

$$(7)\quad x = \frac{3t^2(t^4 + t^2 - 1)}{t^4 + 4t^2 + 1}, \qquad y = \frac{t(2t^6 + 1)}{t^4 - 4t^2 + 1}, \qquad z = \frac{t(2t^4 - t^2 - 4)}{t^4 + 4t^2 - 1}.$$

La *ligne de striction* est une courbe unicursale du septième degré.

3° L'*équation ponctuelle* s'obtient en éliminant t entre les équations (1). En employant le résultant (t. I, n° 234), on trouve

$$(8)\qquad (zx - y)^2 + (1 - z^2)(yz - x) = 0.$$

Pour avoir l'*équation tangentielle*, exprimons que le plan (u, v, w, r) contient une génératrice (n° 369) :

$$(9)\qquad ut + vt^2 + w = 0, \qquad ut^2 + vt + r = 0.$$

En éliminant t par le résultant, on a l'équation demandée :

$$(10)\qquad (vr - uw)^2 + (u^2 - v^2)(ur - vw) = 0.$$

On voit que la surface est du *quatrième degré* et de la *quatrième classe*.

4° Le *contour apparent sur* xOy est l'enveloppe de la projection de G sur ce plan (n° 369). Cette projection a pour équation

$$(11) \qquad tx - y - t^3 + t = 0.$$

En écrivant que cette équation a une racine double en t, on a l'équation du contour apparent :

$$(12) \qquad 4(x+1)^3 - 27y^2 = 0.$$

C'est une développée de parabole. (*Cf.* Chap. XXXV, Exercice proposé n° 35.)

Si l'on veut le contour apparent dans l'espace, il suffit de dériver (11) par rapport à t; on obtient x; en portant dans (11), on a y; en portant dans une des équations (1), on a z. Le calcul donne

$$(13) \qquad x = 3t^2 - 1, \qquad y = 2t^3, \qquad z = 2t - \frac{1}{t};$$

quartique unicursale.

On trouverait de même les contours apparents sur zOx et zOy. Mais, ils nous seront donnés comme cas particuliers des contours apparents sur les plans parallèles à Oz.

Cherchons donc le *cylindre circonscrit* parallèlement à la direction $(\alpha, \beta, 0)$. Le plan mené par G parallèlement à cette direction a pour équation

$$\lambda(t^2 + tz - x) + t^2 z + t - y = 0,$$

avec la condition de parallélisme $\lambda\alpha + \beta = 0$. En tirant λ et portant ci-dessus, il vient

$$(14) \qquad t^2(\beta - \alpha z) + t(\beta z - \alpha) + \alpha y - \beta x = 0.$$

Il faut prendre l'enveloppe de ce plan. En écrivant qu'il y a racine double en t, on a l'équation du cylindre circonscrit :

$$(15) \qquad (\beta z - \alpha)^2 - 4(\alpha z - \beta)(\alpha y - \beta x) = 0.$$

C'est un *cylindre du second degré*.

Pour avoir la *courbe de contact*, on dérive (14) par rapport à t et l'on a z. En portant dans (1), on a x et y. Le calcul donne

$$(16) \qquad x = \frac{t(2\alpha t^2 + \beta t - \alpha)}{2\alpha t - \beta}, \qquad y = \frac{t(2\beta t^2 - \alpha t - \beta)}{2\alpha t - \beta}, \qquad z = \frac{2\beta t - \alpha}{2\alpha t - \beta}.$$

La courbe de contact est une cubique gauche.

En faisant $\alpha = 1$, $\beta = 0$, on a le contour apparent sur yOz; en faisant $\alpha = 0$, $\beta = 1$, on a le contour apparent sur zOx.

Le *cône circonscrit de sommet* O est l'enveloppe du plan (O, G), lequel a pour équation

$$t^3 z - t(y + z) + x = 0. \tag{17}$$

En écrivant qu'il y a racine double en t, on a l'équation du cône :

$$4(y + z)^3 - 27x^2 z = 0. \tag{18}$$

En dérivant (17) par rapport à t et combinant avec (1), on a les équations paramétriques de la *courbe de contact* :

$$x = \frac{2t^3}{2t^2 - 1}, \qquad y = \frac{t(3t^2 - 1)}{2t^2 - 1}, \qquad z = \frac{t}{2t^2 - 1}; \tag{19}$$

quartique unicursale.

5° Si les génératrices s'appuient sur deux droites fixes, celles-ci font partie de la surface. Voyons si elles ne sont pas en évidence sur l'équation (8). Si l'on fait $z = \pm 1$, on obtient $y = \pm x$. D'où les deux droites

$$D_1 : z = 1, \quad y = x; \qquad D_2 : z = -1, \quad y = -x.$$

Elles ne font d'ailleurs pas partie des génératrices, comme on le vérifie aisément sur les équations (1). Ce sont donc, à coup sûr, des *directrices* de la surface réglée. Au surplus, cela est facile à vérifier *a posteriori*. En retranchant les équations (1), on obtient le plan

$$x - y = t(1 - t)(z - 1),$$

dans lequel se trouvent, à la fois, G et D_1. Donc, ces deux droites se rencontrent. On aurait une conclusion analogue, pour G et D_2, en ajoutant les équations (1).

6° Appliquons l'équation (32) du n° 345, en prenant pour a, b, c les coefficients de X, Y, Z dans (4) :

$$\begin{aligned} &2(t\,dz + z\,dt)[t\,dz + (z + 2t)\,dt] \\ &\quad - (dz + 2\,dt)[t^2\,dz + (2tz + 1)\,dt] \\ &\quad + [-t^2\,dz + (6t^2 - 2tz - 1)\,dt]\,dz = 0. \end{aligned}$$

Le coefficient de dz^2 est identiquement nul; donc, on a la solution

$dt = 0$ ou $t = \text{const.}$, qui est, du reste, évidente, puisque *les droites* G *sont des lignes asymptotiques* (n° 374). Divisant par dt, il nous reste, tous calculs faits,

$$(20) \qquad dz(4t^2 - 1) + dt(z^2 - 1) = 0.$$

Les variables sont séparées et l'intégration donne

$$2\log\frac{z-1}{z+1} + \log\frac{2t-1}{2t+1} = \log C;$$

d'où l'on tire

$$(21) \qquad 2t = \frac{(z-1)^2 + C(z+1)^2}{(z-1)^2 - C(z+1)^2} = \frac{z^2+1-2mz}{m(z^2-1)-2z},$$

en substituant à la constante arbitraire C la constante $m = \frac{1-C}{1+C}$. Portant dans (1), on a les *équations des lignes asymptotiques :*

$$(22) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{(z^2-2mz+1)(2mz^3-3z^2+1)}{4[m(z^2+1)-2z]^2}, \\ y = \dfrac{(z^2-2mz+1)(z^3-3z+2m)}{4[m(z^2+1)-2z]^2}. \end{cases}$$

On voit que ces lignes sont des *courbes unicursales du cinquième degré.*

2. *Chercher toutes les surfaces réglées* S *à paramètre de distribution constant et à cône directeur de révolution. Montrer qu'elles peuvent toutes être obtenues de la manière suivante : On prend une hélice quelconque* H ; *sur la normale principale en* M *à cette hélice, on porte une longueur constante* MP *et, par* P, *on mène une parallèle* PG *à la tangente* MT *en* M *à* H. *Cette parallèle engendre la surface* S. *En outre,* P *est le point central et* PMT *est le plan asymptote.*

Prenons pour axe des z l'axe de révolution du cône directeur et soit 2α l'angle au sommet de ce cône. Les cosinus directeurs d'une génératrice G de la surface S sont

$$(1) \qquad a = \sin\alpha\cos\varphi, \qquad b = \sin\alpha\sin\varphi, \qquad c = \cos\alpha.$$

Le point directeur g a pour angle polaire φ sur l'indicatrice, qui est un cercle de rayon $\sin\alpha$. Si nous orientons celui-ci dans le sens des φ croissants, son arc $\sigma = \varphi\sin\alpha$ et sa demi-tangente positive gt a pour angle polaire $\varphi + \frac{\pi}{2}$. Le plan Ogt est parallèle au plan asymptote; la

perpendiculaire gn à ce plan a pour cosinus directeurs

$$(2) \qquad a' = \cos\alpha\cos\varphi, \qquad b' = \cos\alpha\sin\varphi, \qquad c' = -\sin\alpha,$$

en l'orientant de manière que le trièdre $g\lambda nt$ soit positif, $g\lambda$ étant le prolongement de Og. La direction gn est perpendiculaire à G et à la génératrice infiniment voisine G'. Il en résulte que, si l'on prend un point quelconque A sur G et un point quelconque A' sur G', la projection du vecteur $\overrightarrow{AA'}$ sur gn divisée par $d\sigma = \sin\alpha . d\varphi$ donnera en grandeur et en signe le paramètre de distribution k (n° 370). Prenons, par exemple, pour A, le point où G perce xOy et soient ξ, η les coordonnées de ce point. Nous avons

$$(3) \qquad k = \frac{a'\,d\xi - b'\,d\eta}{\sin\alpha . d\varphi} = \cot\alpha\left(\frac{d\xi}{d\varphi}\cos\varphi + \frac{d\eta}{d\varphi}\sin\varphi\right).$$

Nous aurons donc toutes les surfaces S, en prenant, pour ξ, η, les fonctions de φ les plus générales satisfaisant à (3), k ayant une valeur constante quelconque. Il est facile de déterminer toutes ces fonctions sans introduire aucune quadrature. Posons

$$(4) \qquad \xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi = p,$$

p étant une fonction quelconque de φ. Différentions par rapport à φ, en tenant compte de (3) et posant $C = k\tan\alpha$:

$$(5) \qquad -\xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi = p' - C.$$

Résolvons le système (4), (5); nous obtenons

$$(6) \qquad \xi = p\cos\varphi - (p' - C)\sin\varphi, \qquad \eta = p\sin\varphi + (p' - C)\cos\varphi.$$

En définitive, *la surface* S *la plus générale est définie par les formules*

$$(7) \qquad x = \xi + z\tan\alpha\cos\varphi, \qquad y = \eta + z\tan\alpha\sin\varphi,$$

ξ, η étant définis par (6), où p désigne une fonction arbitraire de φ et C une constante liée au paramètre de distribution par

$$(8) \qquad C = k\tan\alpha.$$

Démontrons maintenant les propriétés de l'énoncé. L'équation du plan asymptote est, d'après (2) et (4),

$$(9) \qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi - z\tan\alpha = \xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi = p.$$

Ce plan doit contenir la tangente et la normale principale de l'hélice H. Donc, celle-ci doit être l'arête de rebroussement de l'enveloppe de (9) (n° 289); or l'obtiendra par deux dérivations successives :

$$(10) \qquad -x\sin\varphi + y\cos\varphi = p'.$$

$$(11) \qquad -x\cos\varphi - y\sin\varphi = p''.$$

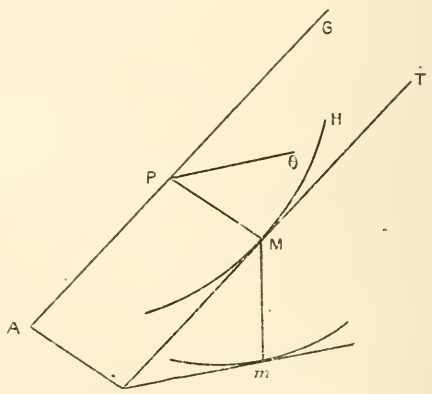
D'abord, c'est bien une hélice, car sa tangente MT, qui est définie par (9) et (10), est parallèle à G et, par suite, fait un angle constant avec Oz. Cela suffit pour prouver que H est une hélice, dont le cylindre rectifiant est parallèle à Oz (*cf.* Chap. XXIV, Exercice résolu n° 9). La base de ce cylindre dans xOy est l'enveloppe de la droite (10). Comme p est une fonction arbitraire, cette base est une courbe quelconque et H est bien l'hélice la plus générale.

Les coordonnées de M sont définies par (9), (10) et (11). La cote z_0 s'obtient immédiatement en combinant (9) et (11) :

$$(12) \qquad z_0 = -\cot\alpha(p + p'').$$

Si nous remarquons maintenant que la normale principale MP à H est parallèle à xOy (n° 616), z_0 est aussi la cote du point P. Il s'agit de mon-

Fig. 36.



trer que ce point est le point central. A cet effet, il nous suffit de faire voir que la tangente $P\theta$ à la courbe $z = \text{const.}$ qui passe par P se trouve dans le plan central, c'est-à-dire dans le plan perpendiculaire au plan asymptote PMT. Et pour cela, il suffit de montrer qu'elle est perpendiculaire à MP, qui a pour angle polaire $\varphi + \frac{\pi}{2}$. En définitive, nous

avons à vérifier la relation

$$-(\xi' - z_0 \operatorname{tang}\alpha \sin\varphi)\sin\varphi + (\eta' + z_0 \operatorname{tang}\alpha \cos\varphi)\cos\varphi = 0$$

ou

$$z_0 \operatorname{tang}\alpha = \xi' \sin\varphi - \eta' \cos\varphi. \tag{13}$$

Or, en différentiant (5) et tenant compte de (4), on trouve que le second membre est égal à $-(p + p'')$. Il est bien égal au premier, d'après (12).

Enfin, il nous reste à prouver que $\overline{MP}$ est constant. Or, $\overline{MP}$ n'est autre que la distance de la droite (10) au point A. Donc,

$$\overline{MP} = -\xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi - p' = -C = -k \operatorname{tang}\alpha, \tag{14}$$

ce qui est bien une constante.

3. *Calculer l'équation du cône de sommet* S (α, β, γ) *et ayant pour directrice la cubique* C :

$$x = \frac{1}{a+t}, \qquad y = \frac{1}{b+t}, \qquad z = \frac{1}{c+t}. \tag{1}$$

Soit M(x, y, z) un point quelconque du cône. Nous allons exprimer que la droite MS rencontre C. A cet effet, nous écrirons que les trois équations telles que la suivante sont compatibles en t, ρ :

$$\alpha + \rho(x - \alpha) = \frac{1}{a+t}$$

ou, en posant $x - \alpha = \xi$,

$$\alpha t + a\xi\rho + \xi t\rho = 1 - a\alpha. \tag{2}$$

Nous avons trois équations du premier degré en t, ρ, $t\rho$. Nous allons les résoudre et nous écrirons que $t.\rho = t\rho$.

Posons

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} \alpha & a\xi & \xi \\ \beta & b\eta & \eta \\ \gamma & c\zeta & \zeta \end{vmatrix} = S\alpha(b-c)\eta\zeta, \\
D_1 &= \begin{vmatrix} 1-a\alpha & a\xi & \xi \\ 1-b\beta & b\eta & \eta \\ 1-c\gamma & c\zeta & \zeta \end{vmatrix} = S(1-a\alpha)(b-c)\eta\zeta, \\
D_2 &= \begin{vmatrix} \alpha & 1-a\alpha & \xi \\ \beta & 1-b\beta & \eta \\ \gamma & 1-c\gamma & \zeta \end{vmatrix} = S\xi[\beta\gamma(b-c) + \beta - \gamma], \\
D_3 &= \begin{vmatrix} \alpha & a\xi & 1-a\alpha \\ \beta & b\eta & 1-b\beta \\ \gamma & c\zeta & 1-c\gamma \end{vmatrix} = -Sa\xi[\beta\gamma(b-c) + \beta - \gamma].
\end{aligned}$$

Nous avons

$$t = \frac{D_1}{D}, \qquad \rho = \frac{D_2}{D}, \qquad t\rho = \frac{D_3}{D}. \tag{3}$$

L'équation demandée est donc

$$D_1 D_2 = D D_3. \tag{4}$$

Elle est du troisième degré, comme on devait s'y attendre.

Notre équation devient illusoire lorsque

$$\frac{1-a\alpha}{\alpha} = \frac{1-b\beta}{\beta} = \frac{1-c\gamma}{\gamma} = 0, \tag{5}$$

car les déterminants D_2 et D_3 sont identiquement nuls. Dans ce cas, il faut reprendre l'élimination. Les équations (2) sont homogènes en $t-\theta$, ρ, $t\rho$. Quels que soient ξ, η, ζ, elles admettent toujours la solution : $t=\theta$, $\rho=0$; ce qui n'est pas étonnant, puisque S est alors sur la courbe. Mais, pour que M appartienne au cône, il faut qu'il y ait un autre point de rencontre. Autrement dit, le système (2) doit admettre une solution non nulle en $t-\theta$, ρ, $t\rho$. On a donc la condition [1]

$$D = 0, \tag{6}$$

qui est maintenant l'équation du cône. On vérifie qu'elle est du second degré (n° 379).

Remarque. — On peut aisément déduire de ce qui précède l'équation du cylindre qui passe par C et dont les génératrices G ont une direction donnée $O\lambda$. Il suffit, en effet, de supposer que S s'éloigne à l'infini dans cette direction. La manière la plus commode de voir ce que devient l'équation (4), consiste à remarquer qu'on peut intervertir les rôles joués par M et S et considérer (4) comme l'équation du cône de sommet M à condition de regarder α, β, γ comme les coordonnées courantes. Si M va à l'infini sur $O\lambda$, ξ, η, ζ deviennent infinis proportionnellement aux paramètres directeurs de cette direction. Mais, l'équation (4) étant homogène en ξ, η, ζ, sa limite s'obtient immédiatement en remplaçant ξ, η, ζ par ces paramètres. Autrement dit, *si, dans* (4), *on regarde* α, β, γ *comme les coordonnées courantes, cette équation représente le cylindre circonscrit à* C *et dont les génératrices ont pour paramètres directeurs* ξ, η, ζ.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Résoudre les questions de l'Exercice proposé n° 1, pour la surface réglée

$$x = tz + t^2, \qquad y = t^2 z + t^3.$$

---

[1] Si cette condition est remplie, il y a une infinité de solutions en $t-\theta$, ρ, ρt. Mais, une seule satisfait à l'équation $t.\rho = t\rho$.

Pour 4°, on prendra les contours apparents sur les plans parallèles à Ox, au lieu de Oz. Pour 5°, il n'y a qu'une droite fixe.

(L'équation différentielle des lignes asymptotiques est homogène en z, t. Elle conduit à des cubiques.)

2. Ligne de striction et paramètre de distribution de la surface engendrée par une droite parallèle à xOy et s'appuyant, d'une part, sur une bissectrice de zOx et, d'autre part, sur un cercle du plan des yz, tangent en O à Oy.

3. On considère un cylindre de révolution et un cône de révolution admettant pour axe une génératrice A du cylindre et ayant un angle au sommet égal à un droit. Calculer les équations paramétriques, l'équation implicite et l'équation tangentielle du conoïde droit, qui a pour axe la génératrice du cylindre diamétralement opposée à A et qui s'appuie sur l'intersection du cylindre et du cône. Calculer l'équation du plan tangent en un point M quelconque. Montrer qu'il existe une infinité de cônes de révolution d'axes parallèles à A circonscrits au conoïde chacun le long d'une biquadratique gauche. Former leur équation en fonction de leur angle au sommet. Les sections par des plans passant par Ox sont des ellipses. Montrer que la développable circonscrite le long de chacune de ces ellipses a pour arête de rebroussement une courbe se projetant suivant une épicycloïde (*cf.* Chap. XXXIX, Exercice proposé n° 6) sur les plans perpendiculaires à A. Le lieu de ces arêtes est un conoïde droit d'axe A. Trouver enfin les lignes asymptotiques du conoïde proposé.

4. Étant données une surface réglée S, une génératrice G de cette surface et une droite quelconque D de l'espace, le plan tangent en M à S rencontre D en P. Montrer que le lieu de la droite MP, quand M décrit G, est une quadrique Q, se raccordant à S le long de G. Montrer que, parmi ces quadriques de raccordement, se trouvent un hyperboloïde de révolution et un paraboloïde hyperbolique équilatère, dont un plan directeur est perpendiculaire à G. Quel est le lieu des normales à S le long de G?

5. Montrer qu'avec les notations et conventions du n° 367, le paramètre de distribution est donné par la formule

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}.$$

La condition pour que le point (α, β, γ) soit le point central est

$$\alpha' a' + \beta' b' + \gamma' c' = 0.$$

On peut se donner arbitrairement l'indicatrice, le paramètre de distribution et l'angle V que font les génératrices avec la ligne de striction. Cette dernière ligne est alors définie par les formules telles que la suivante :

$$\alpha = \int k(b'c - c'b + a\cot V)\,dc.$$

(*Cf.* Exercice résolu n° 2.)

6. On coupe une surface réglée par le plan normal à une génératrice G en son point central C. Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que la section admette C comme point de rebroussement est que le paramètre de distribution soit nul. Application aux surfaces développables.

(Développer les coordonnées x, y d'un point de la section suivant les puissances de c, en utilisant le n° 370.)

7. Si une surface réglée possède une courbe unicursale, elle est unicursale et toutes ses sections planes sont unicursales.

8. Calculer l'équation différentielle des lignes asymptotiques d'une surface réglée. Montrer que quatre quelconques de ces lignes déterminent un rapport anharmonique constant sur les génératrices. Cas où il y a un plan directeur (plus généralement une directrice rectiligne); cas du conoïde.

On trouve l'équation de Riccati (t. I, note III) :

$$2u'\,||\,\alpha'\ a\ a'\,|| + ||\,\alpha'\ a\ \alpha''\,|| + u[\,||\,\alpha'\ \alpha\ a''\,|| + ||\,a'\ a\ \alpha''\,||\,] + u^2\,||\,a''\ a'\ a\,|| = 0.$$

9. Trouver les surfaces réglées à ligne de striction plane. Cas où le cône directeur est de révolution et le paramètre de distribution constant.

(Appliquer l'Exercice n° 5. Si $\gamma = 0$, $\alpha = \int \frac{k\,db}{c}$, $\beta = -\int \frac{k\,da}{c}$. Dans le cas particulier signalé, on pourra aussi se reporter à l'Exercice résolu n° 2 et l'on trouvera l'hyperboloïde de révolution.)

10. Quelle est la condition pour que la droite

$$x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

où a, b, p, q sont des fonctions d'un paramètre t, engendre une dévelop-

pable? Appliquer à la droite

$$x = lz + l^2, \qquad y = l^2 z + ml^3$$

et trouver l'arête de rebroussement.

11. Démontrer que si le plan osculateur d'une courbe passe par un point fixe, cette courbe est plane. En déduire que les géodésiques d'une sphère sont ses grands cercles.

12. Si une courbe tracée sur un cône passe par son sommet S, avec la tangente ST, le plan osculateur en S est le plan tangent au cône le long de ST.

13. Un cône, de sommet S, a pour directrice une courbe gauche C. Montrer que toute section plane de ce cône admet pour points d'inflexion les points des génératrices qui passent par les points de contact des plans osculateurs à C menés par S (génératrices inflexionnelles), pour points doubles, les points des génératrices qui s'appuient deux fois sur C et pour points de rebroussement les points des génératrices tangentes à C.

14. Un cercle C, de rayon 3, a pour centre le point (2, 1, −1). Son axe a pour paramètres directeurs (1, −4, 2). Trouver l'équation du cône qui admet ce cercle pour base et le point (−1, −3, +2) pour sommet.

15. Équation du cône de sommet (1, 1, 1) et admettant pour directrice la cubique

$$y = x^2, \qquad z = x^3.$$

Génératrices doubles et inflexionnelles (É. P., 1907).

16. Équation du cône de révolution de sommet S (3, 1, −3), d'angle au sommet 84° et dont l'axe passe par le point A (−4, −1, +1).

(Le cône est circonscrit à la sphère de centre A et de rayon AS $\sin 42°$.)

17. Équation du cylindre de révolution de rayon 6 et dont l'axe a pour équations

$$x - y - z + 3 = 0, \qquad 2x + y - 4z + 1 = 0.$$

(Cylindre circonscrit à une sphère de rayon 6.)

18. Les seules surfaces développables dont les génératrices s'appuient sur une droite fixe sont des cônes. Les seules développables à plan directeur sont les cylindres.

CHAPITRE XXVII.

NOTIONS SUR LES SYSTÈMES DE DROITES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Étudier la congruence engendrée par la droite* D :

$$x\cos u - y\sin u = v, \qquad x\sin u - y\cos u = \frac{z}{v^m}. \tag{1}$$

Faisons d'abord quelques remarques géométriques simples.

La droite D perce xOy en un point P dont les coordonnées polaires sont $\omega = u$, $\rho = v$. La projection d de D sur xOy est perpendiculaire en P à OP.

L'angle θ de D avec d, c'est-à-dire avec xOy, n'est autre que l'angle du deuxième plan (1) avec xOy; il est donné par la formule

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{v^{2m}+1}}. \tag{2}$$

Il est indépendant de u. Ceci nous montre que, si l'on fait tourner D autour de Oz, on obtient encore des droites de la congruence. Autrement dit, *la congruence est de révolution autour de* Oz. On peut donc prévoir que les surfaces focales sont aussi de révolution et on peut les obtenir aisément comme enveloppe des hyperboloïdes de révolution appartenant à la congruence (n° 389). L'hyperboloïde (v) a pour équation

$$x^2 + y^2 = v^2 + \frac{z^2}{v^{2m}}. \tag{3}$$

Son enveloppe s'obtient en éliminant v entre cette équation et l'équation dérivée

$$2v - 2m\frac{z^2}{v^{2m+1}} = 0. \tag{4}$$

L'élimination est évidente et donne

$$x^2 + y^2 = m^{\frac{1}{m+1}} \left(1 + \frac{1}{m}\right) z^{\frac{2}{m+1}}. \tag{5}$$

Telle est *l'équation commune aux deux nappes de la surface focale*, qui sont symétriques l'une de l'autre par rapport à xOy.

Cherchons maintenant *les développables*. Elles se permutent dans les rotations autour de Oz. En raisonnant comme au n° 364, nous prévoyons donc qu'elles se calculeront par quadratures.

Cherchons une fonction c de u telle que la droite D ait une enveloppe A. Le point de contact F doit satisfaire aux équations (1) et aux équations dérivées par rapport à u :

$$-x\sin u - y\cos u = c', \qquad x\cos u + y\sin u = -mz\frac{c'}{c^{m+1}}. \tag{6}$$

L'élimination de x, y est immédiate et conduit à

$$z = -c^m c' = -\frac{c^{m+2}}{mc'}. \tag{7}$$

L'équation différentielle des développables est donc

$$\frac{c'^2}{c^2} = \frac{1}{m} \tag{8}$$

ou, à un changement près de u en $-u$, c'est-à-dire à une symétrie près par rapport à Ox (1),

$$\frac{c'}{c} = \frac{1}{\sqrt{m}}. \tag{9}$$

Intégrant, il vient, à une rotation arbitraire près autour de Oz,

$$c = e^{\frac{u}{\sqrt{m}}}. \tag{10}$$

On voit que *la droite* D *engendre une développable* Δ *quand le point* P *décrit la spirale logarithmique*

$$\rho = e^{\frac{\omega}{\sqrt{m}}} \tag{11}$$

(1) Changer u en $-u$ dans les équations (1) équivaut à changer y en $-y$ et z en z. La propriété est également évidente d'après les remarques géométriques faites au début.

ou l'une de celles qui s'en déduisent par rotation autour de O ou par symétrie par rapport à Ox.

Le *point focal* F est défini par (1) et (7). Un calcul facile donne ses coordonnées

$$(12)\quad x = c\left(\cos u - \frac{\sin u}{\sqrt{m}}\right), \qquad y = c\left(\sin u + \frac{\cos u}{\sqrt{m}}\right), \qquad z = -\frac{c^{m+1}}{\sqrt{m}}.$$

Si l'on pose $\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{\sqrt{m}}$, ses coordonnées polaires sont $u + \varphi$ et $\frac{c}{\cos\varphi}$.

Sa projection f sur xOy est le point de d tel que $\left(\widehat{OP, Of}\right) = \varphi$.

Les équations (12) sont les équations paramétriques de l'*arête de rebroussement* A. *La projection de cette courbe sur* xOy *est une spirale logarithmique* égale à (11). En faisant tourner A autour de Oz, on obtient *une nappe* Σ *de la surface focale*. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que cette nappe satisfait bien à l'équation (5).

Cherchons le plan focal Φ, tangent à Δ le long de D. Son équation est de la forme

$$(13)\qquad x\sin u - y\cos u - \frac{z}{c^m} + \lambda(x\cos u + y\sin u - c) = 0,$$

λ étant une fonction de u telle que la caractéristique de ce plan soit D. Cette caractéristique est définie par (13) et par l'équation dérivée par rapport à u :

$$x\cos u + y\sin u + \frac{m z c'}{c^{m+1}} + \lambda(-x\sin u - y\cos u - c') + \lambda'(x\cos u + y\sin u - c) = 0.$$

Cette équation doit être une conséquence des équations (1). On trouve que cela exige

$$\lambda = \frac{c}{c'} = m\frac{c'}{c}.$$

Nous retrouvons l'équation (8) et, en supposant (9), $\lambda = \sqrt{m}$. Portant dans l'équation ci-dessus, nous obtenons l'*équation du plan focal* Φ

$$(14)\quad x\left(\cos u - \sqrt{m}\sin u\right) + y\left(\sin u + \sqrt{m}\cos u\right) + \frac{\sqrt{m}\,z}{c^m} - c = 0.$$

En changeant, dans tout ce qui précède, $\sqrt{m}$ en $-\sqrt{m}$, on obtiendrait la deuxième famille de développables. Nous avons d'ailleurs remarqué que cela revient à faire une symétrie par rapport à Ox. Le point focal F'

est symétrique de F par rapport à P. Il se déduit de F par une symétrie par rapport à xOy, suivie d'une rotation de l'angle -2φ autour de Oz. Quand D décrit Δ, il décrit une courbe B se déduisant de A par les opérations ci-dessus et qui est la courbe de contact de Δ avec Σ'. Quant au plan focal Φ', il est symétrique de Φ par rapport au plan (D, d), comme on le voit en changeant $\sqrt{m}$ en $-\sqrt{m}$ dans (14) (1).

2. *On donne une sphère* S *de rayon* R, *et un cercle* C, *concentrique à* S *et de rayon* $R\sqrt{2}$. *Trouver les courbes* Γ *dont les tangentes s'appuient sur* C *et sont tangentes à* S.

Prenons pour origine le centre commun de la sphère et du cercle et le plan de ce dernier pour plan des xy.

Les tangentes aux courbes Γ constituent une congruence, dont les focales sont S et C.

Les développables sont les cônes circonscrits à S à partir des points de C, qui ne donnent pas de courbes Γ (2), et les développables circonscrites à S et C, dont les arêtes de rebroussement, situées sur S, sont les courbes demandées.

Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque d'une telle courbe. Un point quelconque de la tangente a des coordonnées de la forme $x+\rho\,dx$, $y+\rho\,dy$, $z+\rho\,dz$. Le point de rencontre avec xOy est caractérisé par $\rho=-\frac{z}{dz}$; ses premières coordonnées sont donc

$$x-z\frac{dx}{dz},\qquad y-z\frac{dy}{dz}.$$

Écrivons qu'elles satisfont à l'équation du cercle C :

$$(x\,dz-z\,dx)^2+(y\,dz-z\,dy)^2=2R^2\,dz^2$$

ou

$$dz^2(x^2+y^2-2R^2)-2z\,dz(x\,dx+y\,dy)+z^2(dx^2+dy^2)=0.$$

La courbe devant être située sur S, introduisons la latitude θ et la longitude φ du point M. L'équation ci-dessus s'écrit, en divisant tout de suite par R^2,

$$\cos^2\theta\,d\theta^2(\cos^2\theta-2)+2\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta^2 \\ -\sin^2\theta(\cos^2\theta\,d\varphi^2-\sin^2\theta\,d\theta^2)=0$$

(1) On obtient un plan conjugué harmonique de Φ par rapport aux deux plans rectangulaires DPd et DPO.

(2) Leurs courbes de contact sont les trajectoires orthogonales des courbes Γ.

ou

$$d\varphi = \pm \frac{2\sqrt{\cos 2\theta}\, d\theta}{\sin 2\theta}.$$

En posant $\cos 2\theta = u^2$, on trouve, par une intégration facile et en négligeant une rotation arbitraire autour de Oz, ainsi qu'une symétrie par rapport à zOx,

$$\varphi = \frac{1}{2}\log\frac{1+u}{1-u} - \operatorname{arc\,tang} u.$$

3. *Trouver les congruences de normales dont les deux focales sont curvilignes.*

Considérons d'abord une surface S dont les normales s'appuient sur une courbe Φ. Une des familles de développables formées par ces normales est constituée par des cônes ayant leurs sommets sur Φ (n° 390). Soit F le sommet d'un de ces cônes. La courbe C des pieds de ses génératrices sur S a tous ses plans normaux passant par F; elle est donc sur une sphère Σ de centre F (*cf.* Chap. XXIV, Exercice proposé n° 37), laquelle sphère est inscrite à S le long de C. Quand F décrit Φ, Σ a pour enveloppe S, la courbe caractéristique étant C. Or, on sait (n° 281) que cette courbe est un cercle, dont l'axe est la tangente FT à Φ. Donc, le cône (F, C) est de révolution autour de FT (1).

Cela posé, supposons que les normales s'appuient sur une deuxième courbe Φ'. Les cônes ci-dessus passent tous par Φ'. Cette courbe est donc une biquadratique ou une dégénérescence de biquadratique (n° 488). Elle fait d'ailleurs partie de la caractéristique de chaque cône (n° 280). Or, la caractéristique du cône (F) comprend les deux droites isotropes FI et FJ menées par F dans le plan perpendiculaire à FT. En effet, le cône est tangent le long de ces droites aux deux plans isotropes TFI et TFJ (n° 479) et, par suite, à la développable enveloppe de ces plans (2), qui est aussi l'enveloppe des cônes. La caractéristique totale étant une biquadratique et comprenant déjà la conique (FI, FJ), il reste une autre conique comme caractéristique singulière. Cette autre conique ne peut être que la courbe Φ' et la courbe Φ en est une focale (n° 524). En définitive, *les courbes* Φ *et* Φ' *sont deux coniques focales l'une de*

(1) Nous avons donc, en passant, l'énoncé suivant : *Les seules surfaces dont les normales s'appuient sur une courbe fixe* Φ *sont les périsphères dont* Φ *est la déférente* (n° 281).

(2) Le plan TFI, par exemple, a pour caractéristique FI, parce qu'il est tangent en F à Φ et en I au cercle de l'infini.

l'autre. Quant à la surface S, elle est doublement périsphère ; c'est une *cyclide de Dupin* (n° 387).

4. *Complexe tétraédral.* — C'est le complexe des droites Δ qui percent les quatre faces d'un tétraèdre donné ABCD en quatre points a, b, c, d de rapport anharmonique constant ou, ce qui revient au même (¹), qui sont telles que les quatre plans joignant Δ aux quatre sommets aient un rapport anharmonique constant.

Prenons le tétraèdre ABCD pour tétraèdre de référence et définissons les coordonnées d'une droite quelconque par les formules (n° 395)

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha = x't - xt', & \beta = y't - yt', & \gamma = z't - zt', \\ l = yz' - zy', & m = zx' - xz', & n = xy' - yx', \end{cases}$$

où (x, y, z, t) et (x', y', z', t') désignent les coordonnées de deux points quelconques M et M′ de la droite. Supposons que l'on ait

$$(2)\qquad (a, b, c, d) = k$$

et cherchons l'équation du complexe.

Un point quelconque de la droite MM′ a des coordonnées de la forme $x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z', t + \lambda t'$. Les λ des points a, b, c, d sont respectivement $-\frac{x}{x'}, -\frac{y}{y'}, -\frac{z}{z'}, -\frac{t}{t'}$. Leur rapport anharmonique doit être égal à k ; cela s'écrit

$$\frac{-\frac{z}{z'}+\frac{x}{x'}}{-\frac{z}{z'}+\frac{y}{y'}} : \frac{-\frac{t}{t'}-\frac{x}{x'}}{-\frac{t}{t'}-\frac{y}{y'}} = k$$

ou, en chassant les dénominateurs et se servant des formules (1),

$$(3)\qquad kl\alpha + m\beta = 0.$$

Telle est l'*équation du complexe*. Elle est de la forme générale

$$(4)\qquad Al\alpha + Bm\beta + Cn\gamma = 0,$$

à laquelle elle équivaut, moyennant la relation fondamentale (n° 111)

$$(5)\qquad l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

si l'on a $A - C = k(B - C)$.

(¹) *Cf.* Chap. IX, Exercice proposé n° 17 *bis*.

Le cône du complexe, de sommet M′, a pour équation

$$(6) \qquad \mathrm{S}\,\mathrm{A}(yz' - zy')(tx' - xt') = 0.$$

C'est un *cône du second degré circonscrit au tétraèdre.*

La courbe du complexe situé dans le plan $\Pi'(u', v', w', r')$ a pour équation tangentielle

$$(7) \qquad \mathrm{S}\,\mathrm{A}(ur' - ru')(vw' - vw') = 0.$$

C'est une *conique inscrite au tétraèdre.*

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Étudier la congruence engendrée par la droite D

$$x = u^2 + zv, \qquad y = v^2 + zu.$$

On cherchera les points et plans focaux, les développables, les surfaces focales, ainsi que les droites D pour lesquelles les plans focaux sont rectangulaires.

[Il est commode de poser $u = \alpha^2$, $v = \beta^2$. Les droites à plans focaux rectangulaires enveloppent une parabole du plan $x = y$.]

2. Étudier la congruence formée par les tangentes communes à deux paraboloïdes de révolution de même axe et de même sommet.

[Les arêtes des développables se projettent sur le plan tangent au sommet suivant des spirales logarithmiques.]

3. Chercher les courbes dont les tangentes sont tangentes à deux sphères tangentes et égales. (*Cf.* Exercice résolu n° 2.)

4. Même question pour une sphère et un cylindre de révolution dont l'axe est un diamètre de la sphère (É. P., 1906).

5. Étudier la congruence

$$x = u + \rho v, \qquad y = v + \rho u, \qquad z = \rho uv.$$

(Les focales sont deux cylindres paraboliques.)

6. Montrer que si une des surfaces focales Σ est développable, une famille de développables de la congruence est obtenue en prenant les tangentes aux sections de Σ' par les plans tangents à Σ. Rapprocher de l'Exercice précédent.

7. Étudier la congruence

$$x = uz - v, \qquad y = (u^3 - 2uv)z - v(u^2 - v)$$

(Bourses de licence, 1898. — La focale est une biquadratique. La congruence est formée par les génératrices d'un faisceau de quadriques).

8. Montrer que la congruence

$$x = (a + \rho)u, \qquad y = (b + \rho)v, \qquad z = \rho\sqrt{1 - u^2 - v^2}$$

est une congruence de normales. Trouver les surfaces S dont elle constitue les normales. Montrer que ces surfaces peuvent être engendrées par des biquadratiques. Calculer les équations paramétriques de leurs lignes de courbure.

[Les biquadratiques sont les lignes $\rho = \text{const}$. L'équation différentielle des développables est une équation de Clairaut (t. I, Chap. XV, Exercice résolu n° 6) par rapport à u^2 et v^2. Les lignes de courbure se calculent en fonction de ρ.]

9. Montrer que les tangentes communes à deux quadriques homofocales forment une congruence de normales.

[Les plans focaux sont rectangulaires. (*Cf.* Exercice résolu n° 3.)]

10. *Théorème de Malus.* — Des rayons lumineux se réfractent à travers une surface quelconque S. Montrer que, s'ils formaient primitivement une congruence de normales, il en est encore de même après la réfraction.

[Avec les notations du n° 385, prendre pour x, y, z les coordonnées du point d'incidence I. Pour calculer les cosinus directeurs du rayon réfracté, considérer un vecteur 1 porté sur le rayon incident et un vecteur n porté sur le rayon réfracté. Leur somme géométrique est normale à S.

Géométriquement, on peut considérer la sphère de centre I et dont l'enveloppe est une des surfaces normales à la congruence donnée; puis, la sphère concentrique et de rayon n fois plus grand.]

11. Soient deux complexes linéaires : $S = 0$, $S' = 0$. Les complexes linéaires

$$S + \lambda S' = 0$$

forment un *faisceau*, quand λ varie. Montrer que, parmi eux, se trouvent *deux complexes spéciaux* (n° 125). En conclure que les droites communes à deux complexes linéaires s'appuient sur deux droites fixes. Elles forment une *congruence linéaire*.

12. On joint le point $m\ (x, y, 0)$ au point M de coordonnées

$$\frac{-x+y+1}{x+y+1},\quad \frac{x-y+1}{x+y+1},\quad \frac{x+y-1}{x+y-1}.$$

Montrer que la droite obtenue engendre une congruence linéaire et trouver ses droites focales. Calculer l'équation générale des complexes linéaires qui contiennent cette congruence.

13. On reprend la cubique de l'Exercice résolu n° 4 du Chapitre XIV. Montrer que si l'on établit entre deux de ses points M et M′ une correspondance biquadratique et involutive (n° 567), la corde MM′ appartient à un complexe linéaire et réciproquement. Cas de la correspondance homographique; cas où M′ se confond avec M. Si la correspondance est homographique et involutive, la corde MM′ appartient à une congruence linéaire. (Introduire $p = t + t'$ et $q = tt'$.)

14. Étudier le complexe tétraédral (Exercice résolu n° 4), lorsque le tétraèdre ABCD est formé par un trièdre trirectangle $Oxyz$ et le plan de l'infini. Montrer qu'il existe une infinité de quadriques Q jouissant des propriétés suivantes :

1° Toute droite D du complexe est perpendiculaire à sa conjuguée par rapport à Q et réciproquement;

2° Toute droite D est un axe de section plane de Q et réciproquement;

3° Toute droite D rencontre Q en deux points où les normales sont concourantes et réciproquement;

4° Les droites D sont les normales aux quadriques Q.

15. Démontrer que si une cubique gauche est circonscrite au tétraèdre ABCD, toutes ses cordes appartiennent à un complexe tétraédral.

16. Étudier le complexe de l'Exercice résolu n° 4 du Chapitre VIII.

17. Étudier le complexe des droites de moment constant par rapport à un système de vecteurs.

18. Démontrer que si les tangentes à une courbe C appartiennent à un complexe, le plan osculateur en M est le plan tangent au cône du complexe de sommet M, le long de la génératrice MT. (*Cf.* Chap. VIII, Exercice résolu n° 4.)

CHAPITRE XXVIII.

TRANSFORMATIONS.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Soit une fonction* $Z = f(z)$ *de la variable complexe* $z = x + iy$. *Au point* $m(x, y)$, *on fait correspondre le point* $M(X, Y)$, X *et* iY *désignant la partie réelle et la partie imaginaire de* Z. *Les coordonnées étant supposées rectangulaires, montrer que la transformation ainsi définie est conforme.*

Différentions la fonction donnée :

$$dZ = dX + i\,dY = f'(x + iy)(dx + i\,dy).$$

Changeons i en $-i$, en désignant par f_1 la fonction conjuguée de f [1] :

$$dX - i\,dY = f_1(x - iy)(dx - i\,dy).$$

Multiplions membre à membre :

$$dX^2 + dY^2 = f'(x + iy) f_1'(x - iy)(dx^2 + dy^2) = \lambda(dx^2 + dy^2).$$

Les éléments linéaires sont proportionnels; donc, la transformation est conforme (n° 399). On démontre que c'est la transformation conforme la plus générale du plan en lui-même.

2. *Au point* m *de la sphère, de longitude* ω *et de colatitude* θ, *on fait correspondre le point* M *du plan, de coordonnées cartésiennes rectangulaires*

$$x = \log \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}, \qquad y = \omega.$$

Montrer que la carte obtenue conserve les angles. Comment peut-on en déduire toutes les cartes jouissant de la même propriété?

---

[1] Si f est à coefficients réels, $f_1 = f$.

On a

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{d\theta^2}{\sin^2\theta} + d\varphi^2 = \frac{1}{\sin^2\theta}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) = \frac{ds^2}{\sin^2\theta}.$$

La transformation est conforme et le rapport de similitude des petites figures homologues est $\frac{1}{\sin\theta}$. Au voisinage de l'équateur, ce rapport est voisin de 1 et varie très lentement. Mais, quand on s'approche du pôle, il tend vers l'infini. La carte considérée est donc surtout avantageuse pour représenter les régions équatoriales. Elle est connue sous le nom de *projection de Mercator*. Elle transforme les méridiens et les parallèles en droites rectangulaires.

Pour avoir la représentation conforme la plus générale de la sphère sur le plan, il suffit de faire d'abord une projection de Mercator, puis une transformation conforme quelconque du plan en lui-même, définie, par exemple, comme à l'Exercice précédent.

3. *Démontrer que toute projection conique d'un plan* Q *sur un plan* q *établit, entre ces deux plans, une transformation homographique.*

Soient M_1, M_2, M_3, M_4 quatre points quelconques de Q et m_1, m_2, m_3, m_4 leurs projections sur q. Considérons la transformation homographique T qui fait correspondre les points m_i aux quatre points M_i (n° 403). Je dis que l'homologue m de tout point M de Q, dans cette transformation, coïncide avec la projection m' de M. En effet, prenons d'abord M à l'intersection P de M_1M_2 et de M_3M_4; m et m' coïncident avec l'intersection p des droites homologues m_1m_2 et m_3m_4. Prenons maintenant M n'importe où sur M_1M_2; m et m' sont sur m_1m_2 et les rapports anharmoniques (m_1m_2pm) et (m_1m_2pm') sont égaux, comme égaux tous deux à (M_1M_2PM). Donc, m et m' coïncident. On aurait une conclusion analogue en prenant M n'importe où sur l'une des cinq autres droites joignant deux à deux les quatre points M_i. Prenons enfin M n'importe où dans le plan Q. Menons une droite quelconque passant par M; elle rencontre trois des droites ci-dessus en trois points A_1, A_2, A_3, qui ont mêmes homologues a_1, a_2, a_3 dans la transformation T et la projection. On a $(a_1a_2a_3m) = (a_1a_2a_3m')$; donc, m et m' coïncident. C. Q. F. D.

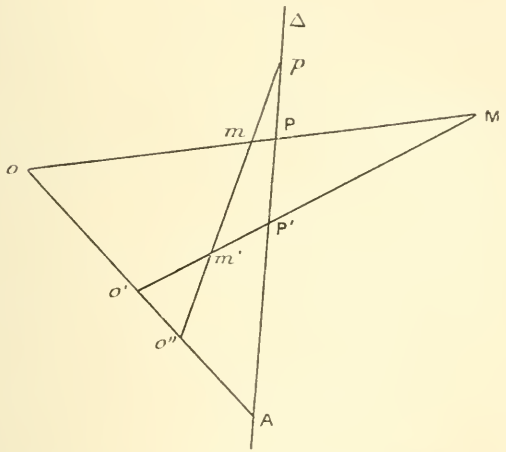
Chasles a démontré que, réciproquement, *deux figures planes homographiques peuvent toujours être amenées en perspective l'une de l'autre.* C'est pour cela que les propriétés qui se conservent dans la transformation homographique sont aussi appelées *propriétés projectives.*

4. *On fait deux homologies d'une même figure plane par rapport à deux centres* O, O′ *différents et avec un même axe* Δ. *Montrer que les deux figures obtenues sont homologiques entre elles, avec l'axe* Δ.

Soient M un point quelconque de la figure F, et m et m' leurs homologues (*fig.* 37). La droite mm' rencontre OO′ en O″. Appliquons au triangle OO′M et aux deux transversales Δ et mm' O″ le théorème de Ménélaüs généralisé (Chap. X, Exercice proposé n° 1) :

$$(OO'AO'') \times (O'MP'm') \times (MOPm) = 1.$$

Fig. 37.



Les deux derniers facteurs sont constants (n° 405) : donc, aussi le premier et le point O″ est fixe.

Appliquons maintenant le même théorème au triangle Mmm' et aux transversales Δ et OO′O″ :

$$(m'mpO'') \times (mMPO) \times (Mm'P'O') = 1.$$

Ceci nous prouve que $(O''pmm')$ est constant; donc, la correspondance entre m et m' est bien une homologie d'axe Δ et de centre O″.

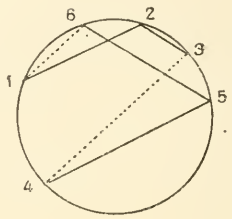
C. Q. F. D.

Remarque. — Lorsque Δ est à l'infini, on a un théorème bien connu sur l'homothétie.

5. *Démontrer le théorème de Pascal* (n° 368), *au moyen d'une transformation homographique.*

Soient α et β les points de rencontre des côtés 12,45 et 23,56. La droite $\alpha\beta$ rencontre la conique en deux points I et J, que nous envoyons aux points cycliques. Notre conique devient un cercle et α, β vont à l'infini. Nous avons alors la figure ci-dessous (*fig.* 38) et il s'agit de

Fig. 38.



prouver que les droites 34 et 61 sont parallèles, sachant que 12 est parallèle à 45 et 23 à 56. Or, cela est évident, car les arcs $\widehat{36}$ et $\widehat{14}$ sont égaux parce que $\widehat{14} = \widehat{52}$ et $\widehat{53} = \widehat{26}$.

6. *Démontrer que toute cubique gauche* Γ' *peut être transformée homographiquement en la suivante :*

$$(1) \qquad y = x^2, \qquad z = x^3.$$

Examinons quelles sont les propriétés particulières de Γ vis-à-vis des axes de coordonnées. D'abord, elle est tangente en O à Ox et osculatrice à xOy. Puis, elle passe par le point C à l'infini sur Oz. La tangente en ce point est la droite de l'infini de yOz; elle rencontre xOy au point B à l'infini sur Oy. Le plan osculateur en C est le plan de l'infini; il rencontre la tangente en O au point A à l'infini sur Ox. Enfin, la cubique Γ passe par le point P(1, 1, 1).

Cela posé, prenons, sur Γ', trois points quelconques O', C', P'. La tangente en O' perce le plan osculateur en C' en un certain point A'. La tangente en C' perce le plan osculateur en O' en un certain point B'. Faisons une transformation homographique telle que les cinq points A', B', C', O', P' deviennent les cinq points A, B, C, O, P (n° 402). Notre cubique Γ' devient une cubique Γ'' ayant sept points communs avec Γ, à savoir trois points en O, trois points en C et un point en P. Elle coïncide donc avec Γ (Chap. XXXII, Exercice proposé n° 9).

7. *Trouver l'enveloppe des coniques* Γ *semblables à une conique donnée et circonscrites à un triangle* ABC.

Les coniques Γ peuvent être caractérisées par la condition que leurs directions asymptotiques font un angle constant V. Faisons une transformation par points inverses, le triangle fondamental étant ABC. La conique Γ devient une droite Δ rencontrant le cercle circonscrit S en deux points vus sous l'angle V de chaque sommet. Cette droite enveloppe un cercle S′ concentrique à S, c'est-à-dire bitangent à S aux points cycliques. Si l'on revient maintenant à la figure primitive, on voit que l'*enveloppe des coniques* Γ *est une quartique* Q *bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques et admettant les points* A, B, C *pour points doubles* (n° 414).

Examinons quelques cas particuliers.

Si les coniques Γ sont des *paraboles*, S′ se confond avec S, et Q se réduit à la droite de l'infini, conformément à la théorie des points limites (¹). Si les coniques Γ sont des *hyperboles équilatères*, le cercle S′ se réduit au centre O de S. Donc, les coniques passent par un quatrième point fixe, qui est l'inverse de O, c'est-à-dire l'orthocentre, ainsi qu'on le vérifie aisément par la Géométrie élémentaire. On retrouve une propriété bien connue (n° 505).

Supposons *le triangle équilatéral et l'angle* V *égal à* 60°. Le cercle S′ est alors le cercle inscrit. Il s'ensuit que Q admet A, B, C pour points de rebroussement. D'après la formule de Plücker (n° 212), elle est de la troisième classe. C'est donc une *hypocycloïde à trois rebroussements* (n° 602).

8. *Équation d'une courbe anallagmatique.* — Soit une courbe anallagmatique Λ, dont le pôle d'anallagmatie est pris pour origine et dont la déférente a pour équation

$$f(\alpha, \beta) = 0. \tag{1}$$

Les cercles bitangents ont pour équation générale

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0. \tag{2}$$

α, β devant satisfaire à l'équation (1) et γ désignant une constante. L'équation de l'enveloppe s'obtient en éliminant α, β entre (1), (2) et

$$\frac{f'\alpha}{2x} = \frac{f'\beta}{2y}. \tag{3}$$

(¹) Les points limites sont A, B, C et le point à l'infini. Il n'y en a pas d'autres, puisqu'il n'y en a que quatre en tout (n° 276).

Mais, observons que si l'on pose

$$-2x = u, \qquad -2y = v, \qquad x^2 + y^2 + z = w,$$

on a exactement à faire les mêmes calculs que si l'on voulait obtenir l'équation tangentielle de la courbe (1). On conclut de là que si

$$F(u, v, w) = 0 \tag{4}$$

est *l'équation tangentielle de la déférente, l'équation de la courbe* A *s'écrit immédiatement*

$$F(-2x, -2y, x^2 + y^2 + z) = 0. \tag{5}$$

9. *Projection stéréographique.* — Considérons la sphère S de centre O et de rayon 1. Prenons le point P(0, 0, 1) et projetons la sphère, à partir du point P, sur le plan des xy. Cette projection porte le nom de *projection stéréographique*. Ce n'est évidemment rien autre qu'une inversion de centre P et de puissance 2. On peut donc lui appliquer toutes les propriétés classiques de cette transformation. En particulier, elle *conserve les angles* et peut servir à faire une *carte de la sphère*. Elle projette les cercles suivant des cercles, les méridiens suivant les droites passant par O et les parallèles suivant les cercles de centre O.

Calculons les coordonnées (x, y) du point m, projection du point M de longitude φ et de colatitude θ. Il est aisé de voir géométriquement, par la considération du triangle rectangle POm, dont l'angle en P égale $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$, que les coordonnées polaires de m sont

$$\rho = \cot\frac{\theta}{2}, \qquad \omega = \varphi. \tag{1}$$

On a donc

$$x = \cot\frac{\theta}{2}\cos\varphi, \qquad y = \cot\frac{\theta}{2}\sin\varphi, \tag{2}$$

formules qu'il serait facile de déduire également des formules générales (48) du n° 421, en transportant l'origine au point P.

Vérifions que la transformation est conforme par le calcul de l'élément linéaire (n° 399) :

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 = \frac{d\theta^2}{4\sin^4\frac{\theta}{2}} + \cot^2\frac{\theta}{2}\,d\varphi^2$$

$$= \frac{1}{4\sin^4\frac{\theta}{2}}\left[d\theta^2 + 4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\,d\varphi^2\right] = \frac{d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2}{4\sin^4\frac{\theta}{2}}.$$

Si $d\sigma$ désigne l'élément linéaire de la sphère, on voit qu'on a

$$ds = \frac{d\sigma}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}. \tag{3}$$

Il y a bien proportionnalité autour de chaque point et le rapport de similitude des petites figures homologues est $\frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$. Il croît de 1 à ∞, quand θ décroît de π à 0.

10. *Équation d'une surface anallagmatique.*

Soit la surface A enveloppe de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0, \tag{1}$$

où δ désigne une constante.

Si la déférente est une surface, on trouve, en répétant le raisonnement de l'exercice 8, que *l'équation de* A *s'obtient en remplaçant, dans l'équation tangentielle de la déférente, u par* $-2x$, *v* par $-2y$, *w* par $-2z$ et *r* par $x^2 + y^2 + z^2 + \delta$.

Examinons maintenant le cas où la déférente est une courbe :

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \qquad g(\alpha, \beta, \gamma) = 0. \tag{2}$$

Si nous posons encore $u = -2x$, etc., nous avons à éliminer α, β, γ, $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, entre les équations (2) et les suivantes (n° 284) :

$$u\alpha + v\beta + w\gamma + r = 0, \tag{3}$$

$$f'_\alpha d\alpha + f'_\beta d\beta + f'_\gamma d\gamma = 0, \qquad g'_\alpha d\alpha + g'_\beta d\beta + g'_\gamma d\gamma = 0, \tag{4}$$

$$u\,d\alpha + v\,d\beta + w\,d\gamma = 0. \tag{5}$$

Or, les équations (3) et (5) expriment que le plan (u, v, w, r) est tangent à la courbe. L'élimination ci-dessus doit donc nous conduire à l'équation tangentielle de la déférente et *la règle donnée plus haut convient aussi lorsque la déférente est une courbe.*

Il convient d'examiner à part le *cas où la déférente est une surface développable*, puisqu'il y a alors deux équations tangentielles, ce qui conduit à deux équations pour A et semble indiquer que l'enveloppe est, non plus une surface, mais une courbe.

Si (a, b, c) sont les coordonnées d'un point quelconque M de l'arête de rebroussement R de la déférente, coordonnées fonction d'un para-

mètre t et si a', b', c' désignent leurs dérivées par rapport à ce paramètre, l'équation (1) prend la forme

$$(6)\quad x^2+y^2+z^2-2(a+\rho a')x-2(b+\rho b')y-2(c+\rho c')z+\delta+\rho=0,$$

ρ désignant un deuxième paramètre, indépendant de t.

En dérivant cette équation par rapport aux deux paramètres, on obtient

$$(7)\quad a'x+b'y+c'z-\rho=0,$$

$$(8)\quad a''x+b''y+c''z=0.$$

D'ailleurs, en tenant compte de (7), (6) s'écrit

$$(9)\quad x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+\delta=0.$$

Il n'y a plus trace du paramètre ρ et nous voyons que les points limites de chaque sphère (6) ne sont autres que les points de contact du cercle limite de la sphère (9) avec son enveloppe (n° 287). *L'enveloppe* A *se réduit donc, dans ce cas, à une courbe anallagmatique, enveloppe des cercles limites des sphères qui ont leurs centres sur l'arête de rebroussement* R *de la déférente.*

Nous voyons, en définitive, que *notre règle générale permet d'obtenir toutes les surfaces et courbes anallagmatiques.* (*Cf.* Chap. XIX, Exercice proposé n° 21.)

Remarque. — Les équations (7) et (8) représentent la perpendiculaire menée par O au plan osculateur en M à R, c'est-à-dire au plan tangent à la déférente. Les deux points limites sont donc symétriques par rapport à ce plan tangent, comme dans le cas général (n° 285).

11. *Polaires réciproques par rapport à un cercle.* — Soit le cercle directeur Γ, de centre O et de rayon R. A tout point M correspond la polaire P (*fig.* 39). On sait que cette droite est perpendiculaire à OM en un point N, qui est conjugué de M par rapport à Γ. On a donc

$$\mathrm{OM}.\mathrm{ON}=\mathrm{R}^2.$$

Les deux points M et N sont inverses l'un de l'autre, si l'on prend Γ pour cercle d'inversion. On conclut de là le théorème suivant :

La polaire réciproque d'une courbe par rapport à un cercle Γ *est l'inverse, par rapport à ce cercle, de la podaire de la courbe par rapport au centre de* Γ.

Considérons un deuxième point M′, sa polaire P′ et le point N′. On a

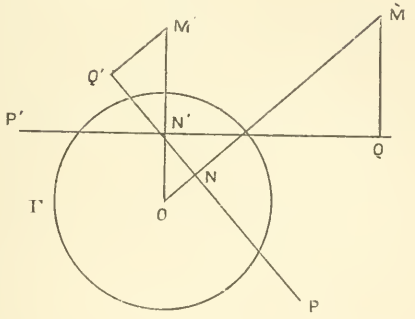
$$\overline{OM}\,.\,\overline{ON} = \overline{OM'}\,.\,\overline{ON'};$$

d'où

$$\frac{OM}{OM'} = \frac{ON'}{ON}.$$

Le triangle OMN′ est donc semblable au triangle OM′N. Les droites P′ et P perpendiculaires, en des points homologues N′ et N, à des droites

Fig. 39.



homologues ON′ et ON, sont des droites homologues et, par suite, aussi les distances MQ et M′Q′. On en conclut l'égalité

$$\frac{MQ}{M'Q'} = \frac{OM}{OM'}$$

ou

$$\frac{MQ}{MO} = \frac{M'Q'}{M'O}.$$

Supposons que P enveloppe un cercle de centre M′. Le second membre demeure constant; donc aussi le premier et le point M décrit une conique de foyer O, de directrice P′ et d'excentricité $\frac{M'O}{M'Q'}$. D'où le théorème suivant :

La polaire réciproque d'un cercle C *par rapport à un cercle* Γ *est une conique admettant pour foyer le centre de* Γ *et pour directrice correspondante la polaire du centre de* C *par rapport à* Γ.

La conique est une *ellipse* ou une *hyperbole*, suivant que $\frac{M'O}{M'Q'}$

est < 1 ou > 1, c'est-à-dire *suivant que le point* O *est intérieur ou extérieur au cercle* C.

On arrive très rapidement au même résultat par des considérations moins élémentaires. La polaire réciproque de C est une conique C'. Aux points cycliques, qui sont sur C, correspondent les droites isotropes issues de O, qui sont donc tangentes à C'. Il s'ensuit que O est un foyer de C' (n° 514). La directrice correspondante est la polaire de O par rapport à C'; c'est donc l'homologue du pôle de la droite de l'infini par rapport à C; autrement dit, c'est la polaire du centre de C par rapport à Γ. Enfin, pour connaître le genre de C', cherchons ses points à l'infini. Ce sont les pôles, par rapport à Γ, des tangentes à C qui passent par O. Ils sont réels ou imaginaires et C' est une hyperbole ou une ellipse, suivant que O est extérieur ou intérieur à Γ.

On a des propriétés analogues dans l'espace; nous laissons au lecteur le soin de les énoncer et de les démontrer.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Montrer que les formules

$$X = x^2 - y^2, \qquad Y = 2xy;$$
$$X = e^x \cos y, \qquad Y = e^x \sin y;$$
$$X = \sin x \operatorname{ch} y, \qquad Y = \cos x \operatorname{sh} y$$

définissent des transformations conformes et calculer les rapports de similitude des petites figures homologues (*cf.* Exercice résolu n° 1). Étudier les courbes transformées des parallèles à Ox et Oy et trouver leurs trajectoires sous un angle constant.

2. Au point m de coordonnées polaires (ρ, ω), on fait correspondre le point M de coordonnées cartésiennes $\left(\rho^2, \frac{\omega}{2}\right)$. Montrer que cette transformation conserve les aires (*transformation équivalente*).

3. Même question pour la transformation

$$X = \frac{1}{x}, \qquad Y = x^2 y.$$

4. On fait suivre la projection de Mercator de la deuxième transformation de l'exercice n° 1. Montrer qu'on obtient la projection stéréographique (Exercice résolu n° 9).

5. *Carte d'État-Major au* $\frac{1}{80\,000}$. — Au point m de longitude φ et de latitude l, on fait correspondre le point M, dont les coordonnées polaires sont données par les formules

$$(1)\qquad \rho = \cot\alpha + \alpha - l, \qquad \rho\omega = \varphi\cos l, \qquad \alpha = \frac{\pi}{4},$$

les angles étant supposés évalués en radians.

1° Montrer que cette projection (dite *projection de Bonne*) conserve les aires.

2° Par quelles lignes sont représentés les méridiens et les parallèles? Montrer que les méridiens sont tous concourants.

3° On oriente la surface de la Terre, en chaque point m, du Nord vers l'Est. Soit m' un point voisin. On appelle g l'angle du méridien orienté vers le Nord avec la direction mm' et s la distance mm'. Soient G et S les grandeurs homologues mesurées sur la carte, celle-ci étant orientée comme la Terre. Calculer G et S en fonction de g et s, ainsi que les parties principales de $\varepsilon = G - g$ et $\eta = \frac{S - s}{s}$, en considérant φ et $l - \alpha = u$ comme des infiniment petits du premier ordre. Étudier les variations de ε et de η en fonction de g et en déduire les erreurs maxima que l'on peut commettre sur un angle ou une distance mesurés sur la carte. Calculer ces erreurs pour $l = 48°30'$, $\varphi = -7°$ (Brest); pour $l = 50°$, $\varphi = 6°$ (Mayence); pour $l = 49°$, $\varphi = 2°$ (Châlons-sur-Marne).

Chercher les lignes dont la longueur est rigoureusement conservée et et celles dont l'angle avec chaque méridien est inaltéré.

4° Calculer la partie principale de l'angle C que fait, sur la carte, le méridien origine avec le méridien du point M (*convergence des méridiens*).

[Pour 1°, calculer la surface du petit parallélogramme qui représente le petit rectangle dont les sommets ont pour coordonnées l, φ; $l + dl$, φ; l, $\varphi + d\varphi$; $l + dl$, $\varphi + d\varphi$.

Pour 2°, le point de concours est l'homologue du pôle. Si $l - \alpha = u$ est petit, on peut écrire $\omega = \varphi\sin\alpha.\left(1 - \frac{u^2}{2}\right)$, au troisième ordre près en u.

Pour 3°, introduire l'angle V défini par $\tan V = \frac{\rho\, d\omega}{d\rho}$ (n° 252). Si V_0 est sa valeur pour le méridien, on a $G = V_0 - V$. (Observer que le sens des ω croissants est inverse du sens de rotation de la carte.) On trouve

$$\varepsilon = \varphi u\cos\alpha\sin^2 g, \qquad \eta = -\frac{\varphi u\cos\alpha\sin 2g}{2}.$$

Les maxima sont $\frac{\varepsilon u}{\sqrt{2}}$ et $\frac{\varepsilon u}{2\sqrt{2}}$. Les courbes dont la longueur est conservée sont les parallèles et $\varphi\omega = \text{const}$. Les courbes dont l'angle avec chaque méridien est conservé sont les méridiens eux-mêmes et les courbes $\omega = \text{const}$.

Pour $\frac{1}{2}$, $C = -(\omega + V_0) = -\varphi \sin l$.]

6. *Projection de Lambert.* — Elle est définie par des équations polaires de la forme

$$\omega = \varphi \sin\alpha, \qquad \varphi = f(l),$$

α étant un angle constant (égal à 55 grades pour les plans directeurs de l'Armée française pendant la guerre 1914-1918). En outre, elle est assujettie à être conforme, le rapport de similitude k des petites figures homologues devant être égal à 1 sur le parallèle $l = \alpha$. Calculer, dans ces conditions, la fonction $f(l)$, supposée décroissante, ainsi que son développement suivant les puissances de $l - \alpha = u$, jusqu'au terme en u^3 inclusivement. Calculer également le rapport k et étudier ses variations. Calculer la partie principale de l'erreur relative dans la mesure d'une longueur.

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi = \cot\alpha \left[\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{l}{2}\right)}\right]^{\sin\alpha} = \cot\alpha \quad u - \frac{u^3}{6} + \dots; \\ &k = -\frac{d\varphi}{dl} = \varphi \frac{\sin\alpha}{\cos l} = \varphi \frac{\sin\alpha(\sin l - \sin\alpha)}{\cos^2 l}; \\ &\varepsilon = k - 1 = -\frac{d\varphi}{du} - 1 = \frac{u^2}{2} + \dots. \end{aligned}\right.$$

7. Montrer que les projections

$$\begin{aligned} &x = \varphi, && y = \sin l && \text{(projection plate)}; \\ &x = \varphi\cos l, && y = l && \text{(projection de Flamsteed)} \end{aligned}$$

conservent les aires.

8. On considère la transformation (1) du n° 398 et l'on suppose qu'au point m_0 (x_0, y_0, z_0), le déterminant fonctionnel (t. I, Chap. XXII, Exercice proposé n° 9) $\frac{D(f, g, h)}{D(x, y, z)}$ soit différent de zéro. Montrer que si deux points m, m', voisins de m_0, sont à une distance ε infiniment petite d'un certain ordre, la distance E des points homologues est infini-

ment petite du même ordre. En conclure que l'ordre du contact de deux courbes passant par m_0 est conservé dans la transformation. [Appliquer la formule des accroissements finis (t. I, n° 131) et les propriétés des formes quadratiques (t. I, n° 306).]

9. Montrer qu'on peut obtenir la transformation homographique la plus générale, en faisant correspondre les points qui ont mêmes coordonnées par rapport à deux tétraèdres (ou triangles) quelconques.

10. Montrer que la transformation homographique conserve l'ordre des complexes algébriques.

11. Montrer que la transformation homographique conserve les lignes asymptotiques.

12. Démontrer que si l'on fait deux perspectives d'une même figure plane sur un même plan, on obtient deux figures homologiques.

13. Étant données deux figures homologiques planes d'axe Δ, on en fait la perspective, à partir d'un point quelconque S, sur un plan parallèle au plan (S, Δ). Que deviennent les deux figures?

14. On appelle *transformation affine* ou *affinité* toute transformation homographique qui conserve le plan (ou la droite) de l'infini. Montrer qu'une telle transformation transforme deux figures homothétiques en deux figures homothétiques.

15. Si deux quadriques sont coupées suivant la même conique C par un plan P, elles sont homologiques de deux manières différentes, P étant le plan d'homologie. Les centres d'homologie sont conjugués harmoniques par rapport aux pôles de P par rapport aux deux quadriques.
(Envoyer C au cercle imaginaire de l'infini.)

16. Deux coniques d'un même plan sont homologiques de douze manières différentes. (Envoyer les sécantes à l'infini. En particulier, l'inversion pour deux cercles est une homologie.)

17. Trouver les centres et rapports d'homothétie des quadriques suivantes :

$$2x^2 - y^2 + 3yz - zx + 2xy - 5x - 2y + z - 1 = 0,$$

$$2x^2 - y^2 + 3yz - zx + 2xy + x + 4y - 3z - 7 = 0;$$

$$-3x^2 + 4z^2 - 4yz + 4zx + 2xy + 3x - y - z = 0,$$

$$-3x^2 + 4z^2 - 4yz + 4zx - 2xy + 2x + 8y - 3z - 5 = 0.$$

18. Démontrer le théorème de Brianchon (n° 368), à l'aide d'une transformation homographique.

(Envoyer aux points cycliques les points de contact des tangentes issues du point de rencontre des droites 14 et 25.)

19. On joint deux points fixes A, B d'une conique à un point P. Les droites PA et PB rencontrent la conique en A′ et B′. Enveloppe de A′B′ quand P décrit une droite fixe Δ.

(Envoyer aux points cycliques les points de rencontre de Δ avec la conique.)

20. Même question en supposant A, B fixes en dehors de la conique et P mobile sur celle-ci.

21. Démontrer que si deux coniques Γ et Γ′ sont telles qu'il existe un triangle ABC inscrit à Γ et circonscrit à Γ′, il en existe une infinité (n° 498).

(Envoyer B et C aux points cycliques.)

22. Démontrer le théorème de Frégier (n° 368).

(Envoyer aux points cycliques les points de rencontre de la conique avec les rayons doubles de l'involution.)

23. Résoudre, par une transformation homographique, l'Exercice proposé n° 52 du Chapitre IX. Même question pour l'Exercice proposé n° 19 du Chapitre XXIX (envoyer aux points cycliques les points de rencontre de BC avec la conique) et pour l'Exercice résolu du n° 3 du même Chapitre (envoyer C au cercle imaginaire de l'infini).

24. Montrer qu'on peut toujours, par une transformation affine, transformer un trièdre quelconque en un trièdre trirectangle.

25. Démontrer que toute cubique gauche peut être transformée homographiquement en la suivante :

$$x = \frac{1}{a+t}, \qquad y = \frac{1}{b+t}, \qquad z = \frac{1}{c+t}.$$

26. Que deviennent les formules de la transformation homographique plane, quand on prend le triangle $A_1A_2A_3$ des trois points doubles pour triangle de référence? Démontrer que le rapport anharmonique du faisceau $A_1(A_2A_3Mm)$ est constant et égal à $\frac{S_3}{S_2}$.

27. Calculer les points doubles d'un déplacement quelconque dans le plan et, plus généralement, d'une correspondance par similitude. Réciproque. Appliquer les résultats de l'Exercice précédent. (Les points doubles sont les points cycliques et le centre de rotation. Partir des formules du changement de coordonnées rectangulaires.)

28. Reprendre l'Exercice précédent dans l'espace. (*Cf.* Chap. III. Exercices résolu n° 2 et proposé n° 16. On remarquera que la racine $S = 1$ est double.)

29. Étant donnée une transformation homographique dans l'espace, la droite qui joint deux points homologues engendre un complexe tétraédral. (*Cf.* Exercice n° 26.)

30. Étudier la transformation du second ordre dont les quatre points doubles sont les sommets d'un triangle et son centre de gravité. Quel est le triangle fondamental?

31. Montrer que toute transformation du second ordre est la transformée homographique d'une transformation par points inverses.

(Cela revient à démontrer qu'étant donnés un triangle ABC et un point D de son plan, on peut faire une transformation homographique telle que D devienne le centre du cercle inscrit ou bien l'orthocentre du triangle transformé de ABC. On peut aussi envoyer aux points cycliques deux points homologues quelconques.)

32. Démontrer, par la Géométrie élémentaire, les propriétés énoncées au n° 416 sur la transformation par points inverses.

33. Deux paraboles variables sont circonscrites au triangle ABC. Leurs axes font un angle constant. Trouver le lieu de leur quatrième point de rencontre.

(*Cf.* Exercice résolu n° 7.)

34. Trouver le lieu des foyers des paraboles inscrites dans un triangle.

(Un des foyers décrit la droite de l'infini.)

35. Que deviennent, dans la transformation par points inverses, les coniques qui passent par deux points fondamentaux B et C? Montrer que tout cercle Γ passant par B et C se transforme en un cercle Γ′ passant par ces mêmes points et faisant avec BA et CA les angles que fait Γ′ avec CA et BA. En déduire que l'angle de deux cercles Γ égale l'angle des deux cercles Γ′ correspondants. Que devient, en particulier, le cercle décrit sur BC comme diamètre?

36. Reprendre les Exercices résolu n° 3 et proposés n^{os} 11 et 12 du Chapitre III du Tome I.

37. Établir, par le calcul, les propriétés élémentaires rappelées au n° 418 sur l'inverse d'une droite ou d'un cercle. Établir également les propriétés relatives à l'inverse d'une conique.

38. Établir, par l'inversion, la propriété du cercle d'isogonalité (n° 175) et de la sphère d'isogonalité.

39. Montrer que l'inversion conserve le rapport anharmonique sur les cercles (n° 568).

40. Étudier ce que devient, par l'inversion, la théorie des points conjugués, pôles et polaires par rapport à une conique.

[Deux points M et M′ sont conjugués par rapport à une cyclique à point double O, si le cercle OMM′ rencontre la cyclique en deux points N et N′ tels que le faisceau O(MM′NN′) soit harmonique.]

41. Que deviennent, dans l'inversion, les axes d'une conique?

(Les considérer comme des cercles orthogonaux aux cercles bitangents.)

42. Que devient le cercle de Monge (n° 530)?

43. Comment peut-on calculer le degré d'une courbe plane anallagmatique connaissant la classe de sa déférente? Cas où celle-ci est une conique.

(*Cf.* Exercice résolu n° 8. Observer qu'il y a abaissement du degré, quand la déférente est tangente à la droite de l'infini.

44. Montrer que toute quartique bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques et admettant un point double à tangentes isotropes est une anallagmatique, dont la déférente est une hypocycloïde à trois rebroussements. (S'appuyer sur l'Exercice résolu n° 8 et sur le n° 602.)

45. Résoudre les équations (48) du n° 421 par rapport à x', y', z'.

46. Vérifier la propriété des tangentes à l'aide des formules (48) rappelées ci-dessus.

On vérifiera que les deux points $\left(-\frac{a^2dx}{r^2}, -\frac{a^2dy}{r^2}, -\frac{a^2dz}{r^2}\right)$ et (dx', dy', dz') sont symétriques par rapport à la droite OM.

47. Reprendre, pour l'espace, les Exercices 39 et 41.

48. Comment se transforme, par l'inversion, une conique dont le plan ne passe pas par le pôle d'inversion? (Biquadratique sphérique; *cf.* Chap. XXXVIII, Exercice résolu n° 2.)

49. Que sont les projections stéréographiques des loxodromies?

50. Établir les propriétés des cercles de la sphère en projetant stéréographiquement les cercles du plan des xy. (*Cf.* Chap. XII.)

51. Montrer que toute surface anallagmatique admettant pour déférente une surface réglée est une surface cerclée. (*Cf.* Exercice résolu n° 10).

52. Reprendre, dans l'espace, l'Exercice 43.

53. Montrer que l'inverse d'une conique quelconque de l'espace est une courbe anallagmatique.

Même question pour l'inverse d'une quadrique. (Considérer les cercles et sphères bitangents.)

54. L'inversion conserve les cercles de courbure et les sphères osculatrices et suroscultatrices d'une courbe quelconque.

55. L'inversion conserve les cercles et sphères de rayon nul.

56. L'inversion transforme les lignes de courbure d'une surface quelconque suivant les lignes de courbure de la surface transformée. (S'appuyer sur l'Exercice proposé n° 11 du Chapitre XXIII.)

57. Déduire des formules (53) du n° 426 les formules qui définissent la transformation associée T′ :

$$(a' = a_1x' + a'y' + a''z' - a'''t, \qquad c' = b_1x' + \dots).$$

58. Si deux points m et M correspondent à un même plan P par les deux transformations associées T et T′, ils sont en correspondance homographique. Écrire les formules qui définissent cette correspondance. Montrer que, pour que m coïncide toujours avec M, il faut et il suffit que le tableau des coefficients des formules (53) soit symétrique. Les transformations T et T′ coïncident alors avec une transformation par plans polaires réciproques; trouver l'équation de la quadrique directrice

$$(a_1x' + a'y' + a''z' + a'''t = ax + by + cz + et, \dots).$$

59. Si une transformation corrélative est telle que cinq plans aient les

mêmes points homologues dans cette transformation et dans son associée, c'est une transformation par plans polaires réciproques.

(La transformation homographique ci-dessus possède cinq points doubles.)

60. A un même plan, on fait correspondre deux points M et M′ par deux transformations corrélatives quelconques. La correspondance entre M et M′ est homographique. En déduire que toute transformation corrélative se ramène, par une transformation homographique convenable, à une transformation par plans polaires réciproques de quadrique directrice donnée.

61. Écrire les formules qui définissent la transformation corrélative associée au complexe linéaire (n° 125) :

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + Dl + Em + Fn = 0.$$

Montrer que toutes les transformations de cette nature sont caractérisées par la condition que leur déterminant est un déterminant symétrique gauche (t. I, n° 277) ou encore par la condition que chaque plan passe par le point qui lui correspond.

62. Si deux courbes sont osculatrices, une transformation corrélative les transforme en deux développables dont les arêtes de rebroussement sont osculatrices. (*Cf.* n° 126, théorème IV.)

63. Comment se transforment, par corrélation, les coniques dans le plan, les coniques, les quadriques et les cônes du second degré dans l'espace?

64. Étant donnée la conique directrice

$$2x^2 - y^2 + 3xy + 2x - 5y - 1 = 0,$$

trouver les équations ponctuelle et tangentielle de la polaire réciproque de la conique

$$x^2 + 2y^2 - 1 = 0.$$

65. Étant donnée la quadrique directrice

$$3x^2 + y^2 - z^2 + 2x - 4y = 0,$$

trouver les équations de la polaire réciproque du cône

$$(x - y)^2 + (2y - z + 1)(z - 1) = 0$$

et de la conique

$$x^2 + 2xy + z^2 - 6x = 0, \qquad x + 5y - z - 2 = 0.$$

66. Comment reconnaît-on le genre et comment trouve-t-on le centre de la polaire réciproque d'une conique C par rapport à une conique Γ? Mêmes questions dans l'espace.

67. Trouver l'enveloppe des cordes d'une conique C vues d'un point fixe O sous un angle droit.

(Transformer par polaires réciproques par rapport à un cercle de centre O. On est ramené au cercle de Monge.)

68. Trouver le lieu des sommets des angles de grandeur constante circonscrits à une conique. (Polaire réciproque par rapport à un cercle ayant pour centre un foyer de la conique.)

69. Reprendre l'Exercice 67, en supposant un angle constant quelconque.

70. Soient une conique C et deux droites D et D'. Trouver l'enveloppe des droites Δ qui coupent D, D' et C suivant une division harmonique.

(Faire une transformation corrélative telle que D et D' deviennent les points cycliques.)

71. On détermine un point M par deux visées faites de deux postes O et O'. Construire un abaque à alignements donnant les coordonnées du point M à partir des angles annoncés par les deux postes.

(Faire une transformation corrélative quelconque. Les rayons visuels OM et O'M et les parallèles aux axes de coordonnées menées par M se transforment en quatre points en ligne droite, qui décrivent les quatre droites homologues des points O, O' et à l'infini sur les axes. En graduant convenablement ces droites, il suffit de tendre un fil entre les deux premières pour lire, sur les deux autres, les coordonnées cherchées.)

72. Montrer que la correspondance entre un point et sa polaire trilinéaire équivaut à une transformation du second ordre suivie d'une transformation par polaires réciproques. (*Cf.* Chap. IX, Exercice proposé n° 2 et Chap. X, Exercice proposé n° 1.)

CHAPITRE XXIX.

PROPRIÉTÉS PROJECTIVES DES COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *On considère les coniques* C *définies par l'équation*

$$x^2 + 2\lambda xy + \mu y^2 - 2x + 4\lambda y - \lambda^2 = 0. \tag{1}$$

1° *Calculer* μ *en fonction de* λ *pour que la conique se décompose. Calculer les équations des droites de décomposition et trouver le lieu de leur point de rencontre.*

2° *Montrer qu'il existe deux coniques* C *admettant pour polaire d'un point donné* P *une droite donnée* D. *Discuter leur réalité.*

1° Écrivons que la conique admet un point double A :

$$x + \lambda y - 1 = 0, \qquad \lambda x + \mu y + 2\lambda = 0, \qquad -x + 2\lambda y - \lambda^2 = 0. \tag{2}$$

Ces équations doivent être compatibles en x, y. La première et la dernière ne renferment pas μ. Si, entre elles, on élimine λ, on obtient *l'équation du lieu* L *de* A :

$$(3x - 2)y^2 + (x - 1)^2 = 0. \tag{3}$$

On peut aussi les résoudre par rapport à x, y :

$$x = \frac{2 - \lambda^2}{3}, \qquad y = \frac{1 + \lambda^2}{3\lambda}. \tag{4}$$

Cela donne les équations paramétriques de L, qui est une cubique facile à construire.

Si, maintenant, on porte (4) dans la deuxième équation (2), on obtient la condition de dégénérescence

$$\lambda \frac{(2 - \lambda^2)}{3} + \mu \frac{(1 + \lambda^2)}{3\lambda} + 2\lambda = 0.$$

Elle est du premier degré en μ et l'on en tire

$$\mu = \frac{\lambda^2(\lambda^2 - 8)}{\lambda^2 + 1}. \tag{5}$$

Cette condition étant supposée remplie, pour calculer les équations des droites de décomposition, décomposons (1) en carrés; on trouve, en remplaçant μ par sa valeur,

$$(x + \lambda y - 1)^2 - \frac{1}{\lambda^2 + 1}(3\lambda y - \lambda^2 - 1)^2 = 0.$$

On a bien deux carrés seulement et les deux droites ont pour équations

$$\pm (x + \lambda y - 1)\sqrt{\lambda^2 + 1} - 3\lambda y - \lambda^2 - 1 = 0. \tag{6}$$

On vérifie aisément qu'elles se coupent au point A, dont les coordonnées sont données par (4).

On peut rendre l'équation (6) rationnelle, en posant $\lambda = \tang\varphi$; on obtient ainsi l'équation générale des droites D sous la forme

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi(1 + 3\varepsilon\cos\varphi) - \cos\varphi - \varepsilon = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{7}$$

2° Soient (x_0, y_0) les coordonnées du point P et (u, v, w) celles de la droite D. On doit avoir (n° 434)

$$\frac{x_0 + \lambda y_0 - 1}{u} = \frac{\lambda x_0 + \mu y_0 + 2\lambda}{v} = \frac{-x_0 - 2y_0 - \lambda^2}{w}. \tag{8}$$

En égalant le premier et le dernier rapport, on obtient une équation qui ne renferme pas μ :

$$\lambda^2 u + \lambda y_0(w - 2u) - ux_0 + w(x_0 - 1) = 0. \tag{9}$$

Elle est du second degré en λ. Quand on en a tiré λ, on a ensuite μ en égalant les deux premiers rapports :

$$\mu y_0 = \frac{v}{u}(x_0 - \lambda y_0 - 1) - \lambda(x_0 + 2). \tag{10}$$

Il y a bien *deux coniques* C *répondant à la question*. Si l'on observe l'équation (9), on voit qu'elle ne renferme pas v. *La valeur de* λ *ne dépend donc que* du rapport $\frac{w}{u}$, ou, si l'on veut, de l'abscisse $\xi = -\frac{w}{u}$ *du point de rencontre* B *de* D *avec* Ox. On peut en déduire que, lorsque D pivote autour de ce point, la conique C est *bitangente à une*

conique fixe en ses deux points de rencontre avec Ox (n° 307), puisque μ seul varie.

Remplaçons $\frac{w}{u}$ par $-\xi$ dans l'équation (9) :

$$\lambda^2 - \lambda y_0(\xi + 2) - x_0 - \xi(1 - x_0) = 0. \tag{11}$$

La condition de réalité de λ et, par suite, de la conique C, est

$$y_0^2(\xi + 2)^2 - 4[x_0 + \xi(1 - x_0)] \geq 0$$

ou

$$\xi^2 y_0^2 + 4\xi(y_0^2 + x_0 - 1) - 4(y_0^2 - x_0) \geq 0. \tag{12}$$

Le premier membre est un trinome du second degré en ξ. Soient ξ_1 et ξ_2 ses racines, B_1 et B_2 les points correspondants de Ox. *Pour que les deux coniques* C *soient réelles, il faut et il suffit que la droite* D *rencontre* Ox *à l'extérieur du segment* B_1B_2.

Ce segment dépend de la position du point P. Il convient d'étudier sa réalité. La condition de réalité des racines du trinome (12) est

$$(y_0^2 - x_0 - 1)^2 - y_0^2(y_0^2 - x_0) \geq 0$$

ou

$$(x_0 - 1)^2 + y_0^2(3x_0 - 2) \geq 0. \tag{13}$$

Le premier membre n'est autre que (3). Si l'on remarque que l'inégalité est satisfaite par l'origine, on voit que le segment B_1B_2 n'est réel que si P se trouve dans la région, limitée par la courbe L, qui comprend l'origine. En conséquence, *si* P *n'est pas dans cette région, les coniques* C *sont toujours réelles, quelle que soit la droite* D.

Lorsque P est sur L, le trinome (12) est un carré parfait, soit

$$\left[\xi y_0 + 2\frac{(y_0^2 + x_0 - 1)}{y_0}\right]^2.$$

Les deux racines de (11) sont donc rationnelles. Il serait facile de les calculer. Mais il vaut mieux se demander, dès maintenant, à quoi tient cette particularité. Rappelons-nous que le point P est le point double d'une conique C_1, dont le λ annule les numérateurs des premier et dernier rapports (8). Dès lors, l'équation (11), qui a été obtenue en égalant ces deux rapports, admet certainement cette racine λ_1, qui est égale à $\frac{1 - x_0}{y_0}$. L'autre racine λ_2 est donnée, par exemple, par la somme des racines

$$\lambda_2 = y_0(\xi + 2) + \frac{x_0 - 1}{y_0}. \tag{14}$$

La valeur μ_1, qui correspond à λ_1, annule le deuxième rapport (8). Elle est indépendante, comme λ_1, de la droite D et la conique (λ_1, μ_1) n'est autre que la conique C_1 qui admet P pour point double. Ce résultat était, du reste, évident *a priori*; car, quelle que soit la droite D, elle admet le point P pour pôle singulier (n° 434) par rapport à C_1.

Quant à la conique C_2 correspondant à λ_2, on l'obtiendrait en portant (14) dans (10). Nous laissons au lecteur le soin de faire ce calcul.

2. *Chercher les cônes pouvant être représentés par l'équation*

$$x^2+y^2+z^2-2\lambda x+2\mu y+2\nu z+1-2(\lambda yz+\mu zx+\nu xy)=0. \tag{1}$$

Écrivons les quatre équations dérivées

$$x-\nu y-\mu z-\lambda=0, \tag{2}$$

$$\nu x-y-\lambda z+\mu=0, \tag{3}$$

$$\mu x+\lambda y-z+\nu=0, \tag{4}$$

$$x+y+z-1=0. \tag{5}$$

Il faut qu'elles soient compatibles en x, y, z. Retranchons (5) de (2):

$$y(\nu-1)+z(\mu+1)=0, \tag{6}$$

et l'on a deux équations analogues, en retranchant (5) de (3) ou de (4). On obtient ainsi trois équations homogènes. Comme la solution

$$x=y=z=0$$

ne saurait vérifier (5), il faut que le déterminant de ce système soit nul. Or, il est égal, comme il est facile de le vérifier, à $2(\lambda-1)(\mu-1)(\nu-1)$. *L'un des trois nombres λ, μ, ν doit donc être égal à* 1.

Soit, par exemple, $\nu=1$. L'équation (6) nous donne $z=0$ et le système (2), (3), (4), (5) se réduit à

$$x-y+1=0, \qquad \mu x+\lambda y+1=0, \tag{7}$$

qui détermine x et y d'une manière unique, si λ et μ ne sont pas égaux à 1 [1]. La surface est donc un cône C dont le sommet S est un point quelconque de la droite D du plan des xy représentée par la première

---

[1] Si $\lambda=\mu\neq 1$, les équations (7) sont incompatibles. Mais, en coordonnées homogènes, elles admettent la solution $x-y=0$, $t=0$, le sommet est à l'infini; la surface est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la seconde bissectrice de xOy.

équation (7). Il y a d'ailleurs une infinité de cônes C admettant pour sommet un tel point, car il y a une infinité de valeurs de λ, μ satisfaisant à (7), pour des valeurs données de x, y.

Voyons ce que devient l'équation (1). Elle peut s'écrire

$$(8) \qquad (x+y+1)^2+2z\left(\mu x+\lambda y+\frac{z}{2}+1\right)=0.$$

Elle a bien la forme caractéristique de l'équation des cônes (n° 375) et, en annulant les trois formes linéaires

$$x+y+1, \quad z, \quad \mu x+\lambda y+\frac{z}{2}+1,$$

on retrouve le sommet S ci-dessus. L'équation (8) nous montre encore que, lorsque λ et μ varient, tous les cônes C sont tangents au plan des xy le long de la droite D (n° 507).

Cherchons si le cône peut dégénérer. Les équations (2) à (5), et par suite les équations (7), doivent admettre une infinité de solutions. Ceci n'est possible que si $\lambda=\mu=1$. Dans ce cas, les quatre équations (2) à (5) se réduisent à

$$(9) \qquad x+y+z+1=0.$$

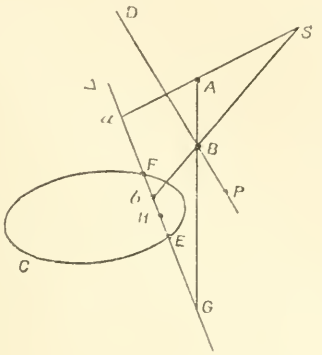
Il y a un plan de points doubles; la surface est un plan double, à savoir le plan (9) compté deux fois. Effectivement, si $\lambda=\mu=\nu=1$, le premier membre de (1) est identique à $(x+y-z+1)^2$.

3. *Soient une conique* C *et un point* A *et une droite* D *non situés dans son plan. Trouver le lieu des sommets des cônes ayant pour base* C *et tels que le plan polaire de* A *par rapport à chacun d'eux passe par* D.

Soit P le point de rencontre de D avec le plan de C (*fig.* 40). Le plan polaire de ce point par rapport au cône doit passer par A et aussi par la polaire Δ de P par rapport à C. Comme il doit contenir le sommet S, on voit que celui-ci doit déjà se trouver dans le plan (A, Δ). Soit maintenant B le point de rencontre de D avec ce plan. Les droites SA, SB doivent être conjuguées par rapport au cône; elles doivent donc couper Δ en deux points conjugués harmoniques par rapport aux deux points de rencontre E, F de Δ et de C. Cette condition est d'ailleurs suffisante, car, si elle est remplie, le plan polaire de A passe par B; il passe, d'autre part, par P, puisque le plan polaire de ce point est (S, Δ) et contient A; donc, le plan polaire de A contient D. En définitive, nous sommes

ramenés à trouver, dans le plan (A, Δ), le lieu des points S tels que SA, SB divisent harmoniquement le segment EF. Il est évident que AS et BS décrivent des faisceaux homographiques. Donc, *le lieu demandé*

Fig. 40.



est une conique passant par A *et* B. Les tangentes en ces points passent par le point H conjugué harmonique, par rapport à EF, du point de rencontre G de AB avec EF.

Solution analytique. — Prenons le tétraèdre AGHH' pour tétraèdre de référence. La conique C doit être conjuguée par rapport au triangle GHH'; elle a donc des équations de la forme

$$x = 0, \qquad Ay^2 + A'z^2 + A''t^2 = 0. \tag{1}$$

La droite D a des équations de la forme

$$z = 0, \qquad \alpha x + \beta y = 0. \tag{2}$$

Soient (X, Y, Z, T) les coordonnées du sommet S. Formons l'équation du cône (S, C). Si (x, y, z, t) sont les coordonnées d'un quelconque de ses points, on doit pouvoir déterminer λ pour que le point

$$(x + \lambda X,\ y + \lambda Y,\ z + \lambda Z,\ t + \lambda T)$$

appartienne à la conique C, c'est-à-dire satisfasse aux équations (1). La première de ces équations nous donne $\lambda = -\frac{x}{X}$; en portant dans la seconde, nous obtenons l'équation du cône

$$A(yX - xY)^2 + A'(zX - xZ)^2 + A''(tX - xT)^2 = 0. \tag{3}$$

Prenons le plan polaire du point A (1, 0, 0, 0) :

$$(4)\qquad AY(yX - xY) + A'Z(zX - xZ) - A''T(tX - xT) = 0.$$

Écrivons qu'il passe par D. En faisant $z = 0$ dans (4), on doit obtenir la seconde équation (2); cela donne les deux conditions

$$(5)\qquad T = 0, \qquad \alpha AXY + \beta(AY^2 + A'Z^2) = 0.$$

Telles sont les équations du lieu demandé. Elles représentent bien une conique du plan AGH. En écrivant la seconde équation (5) sous la forme

$$AY(\alpha X + \beta Y) + \beta A'Z^2 = 0,$$

on reconnaît (n° 507) qu'elle est tangente en A et B à HA et à HB.

4. *Calculer l'équation tangentielle de la quadrique*

$$(1)\qquad x^2 + 2y^2 + \lambda z^2 + 2yz + 2\lambda x + 4y = 0.$$

On pourrait employer le déterminant (19) du n° 441. Il nous paraît plus simple de procéder par élimination élémentaire. Nous avons à éliminer x, y, z, ρ entre les cinq équations

$$(2)\quad x + \lambda = \rho u, \qquad 2y + z + 2 = \rho v, \qquad y + \lambda z = \rho w, \qquad \lambda x + 2y = \rho r,$$

$$(3)\qquad ux + vy + wz + r = 0.$$

Des première, quatrième et deuxième équations (2), on tire successivement

$$(4)\quad x = \rho u - \lambda, \qquad y = \frac{\rho(r - \lambda u) + \lambda^2}{2}, \qquad z = \rho(v - r + \lambda u) - \lambda^2 - 2.$$

Portant dans la troisième équation (2) et dans l'équation (3), nous obtenons les deux équations du premier degré en ρ :

$$(5)\qquad \rho\left[\frac{r - \lambda u}{2} + \lambda(v - r + \lambda u) - w\right] + \frac{\lambda^2}{2} - 2\lambda - \lambda^3 = 0,$$

$$(6)\qquad \rho\left[u^2 + \frac{v(r - \lambda u)}{2} + w(v - r + \lambda u)\right] + \left[-\lambda u + \frac{\lambda^2 v}{2} - (\lambda^2 + 2)w + r\right] = 0.$$

En éliminant ρ, on a l'équation cherchée, sous la forme

$$(7)\qquad AB + \lambda\left(\lambda^2 - \frac{\lambda}{2} + 2\right)C = 0,$$

A, B, C désignant les trois crochets. Les formules (4) nous donnent en outre *les coordonnées du point de contact* du plan (u, v, w, r).

Le coefficient du second terme de (7) s'annule pour $\lambda = 0$ et pour deux valeurs imaginaires de λ, dont nous ne nous occuperons pas. Examinons le *cas où* λ *est nul*. L'équation (7) se décompose et il semble, par suite, que la quadrique dégénère en deux points (n° 444), ce qui est absurde, car une telle dégénérescence ne saurait convenir à l'équation ponctuelle (1). Il nous faut revenir à notre élimination. L'équation (5) se réduit à

$$\rho(r - 2w) = 0. \tag{8}$$

Elle est satisfaite pour $\rho = 0$. Ceci nous prouve que les quatre équations dérivées ont une solution commune, qui est donnée par les formules (4)

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = -2.$$

Donc, *la quadrique est un cône* [1], de sommet $(0, 0, -2)$.

Si l'on veut des solutions du système (2), (3) autres que la précédente, il faut supposer $\rho \neq 0$, donc

$$r - 2w = 0. \tag{9}$$

L'équation (6) se réduit alors à

$$u^2 + \frac{vr}{2} + w(v - r) = 0. \tag{10}$$

Les équations (9) et (10) sont *les équations tangentielles du cône*. Lorsqu'elles sont satisfaites, les formules (4), où ρ doit être laissé arbitraire, donnent la solution générale du système (2), (3), c'est-à-dire *les coordonnées d'un quelconque des points de la génératrice de contact* du plan (u, v, w, r):

$$x = \rho u, \qquad y = \rho \frac{r}{2}, \qquad z = \rho(v - r) - 2.$$

5. *Trouver les valeurs de* λ *qui font dégénérer la quadrique*

$$\lambda^2 u^2 - v^2 - 2rw + 4uv - 4ur + 2wr - 7r^2 = 0 \tag{1}$$

et trouver, dans ce cas, ses équations ponctuelles.

---

[1] Le coefficient de C, dans (7), est égal au discriminant de (1), au facteur -2 près. Quand il est nul, on a un cône.

Écrivons les quatre équations dérivées

$$\lambda^2 u + 2v + r = 0. \tag{2}$$

$$2u - v - w = 0, \tag{3}$$

$$-v + r = 0, \tag{4}$$

$$u + w + \lambda r = 0. \tag{5}$$

Elles doivent être compatibles. Des trois dernières, on tire

$$v = r, \qquad u = \frac{r(1-\lambda)}{3}, \qquad w = -\frac{r(1+2\lambda)}{3}. \tag{6}$$

Portant dans la première, nous obtenons la condition à laquelle doit satisfaire λ :

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 9 = 0, \tag{7}$$

équation du troisième degré, dont l'unique racine réelle est à peu près 2,17.

Si λ a cette valeur, l'équation (1) représente une conique. Les coordonnées de son plan sont données par les formules (6), ce qui donne pour équation de ce plan

$$(1-\lambda)x + 3y - (1+2\lambda)z + 3 = 0 \tag{8}$$

ou

$$-1,17x + 3y - 5,94z + 3 = 0. \tag{9}$$

Pour avoir la seconde équation de la conique, cherchons le cône qui l'admet pour base et qui a son sommet à l'origine. Ses équations tangentielles sont (1) et $r = 0$. En annulant r dans (1), nous obtenons

$$\lambda^2 u^2 - v^2 - 2vw + 4uv = 0,$$

et il nous suffit d'écrire l'équation correspondante en x, y, z (n° 377), ce que nous faisons, par exemple, en employant les mineurs du discriminant (n° 111)

$$x^2 + (\lambda^2 + 4)z^2 + 4zx - 2\lambda^2 yz = 0$$

ou

$$x^2 + 10,1z^2 + 4zx - 12,2yz = 0. \tag{10}$$

Les équations (9) et (10) sont les équations ponctuelles demandées.

6. *Calculer les coordonnées d'un point quelconque de la quadrique*

$$yz + zx + xy + 1 = 0 \tag{1}$$

en fonction des paramètres de ses génératrices (É. P., 1913).

L'équation (1) peut s'écrire

$$(x + y)(x + z) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

Les équations des deux systèmes de génératrices sont (n° 446)

$$x + y = u(x - 1), \qquad x + z = \frac{x + 1}{u}; \tag{2}$$

$$x + y = v(x + 1), \qquad x + z = \frac{x - 1}{v}. \tag{3}$$

En retranchant (3) de (2), on trouve x. Portant ensuite dans (2), on a y et z. On obtient ainsi

$$x = \frac{u + v}{u - v}, \qquad y = \frac{2uv - u - v}{u - v}, \qquad z = \frac{2 - u - v}{u - v}.$$

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Déterminer λ pour que la conique C

$$2\lambda x^2 + 2\lambda^2 xy + \lambda y^2 - 2\lambda x + 4y - 1 = 0$$

se décompose en deux droites. Calculer les équations de celles-ci, ainsi que les coordonnées de leur point de rencontre. Trouver l'enveloppe de la polaire d'un point fixe P par rapport à C, quand λ varie. Lieu de P pour que cette polaire passe par un point fixe Q. Quel est le lieu de Q?

2. Trouver la condition pour que la conique

$$\lambda x^2 - 2\mu xy + y^2 + 2\lambda^2 x + 2\mu y - \lambda = 0$$

se décompose en deux droites. Équations de ces dernières; lieu de leur point de rencontre.

3. Déterminer λ et μ pour que l'équation

$$x^2 - 2\mu xy + \lambda y^2 + \mu^2 x - \lambda\mu y + 1 = 0$$

représente une droite double.

4. Montrer que l'équation

$$x^2+\lambda y^2+\lambda z^2+2\lambda^2 yz+2zx+2\lambda x+2\lambda z+\lambda^2=0$$

représente un cône, quel que soit λ, et trouver son sommet. Pour quelles valeurs de λ se décompose-t-il en deux plans? Calculer les équations de ces plans.

5. Quelles relations doivent lier les nombres α, β, γ, δ pour que l'équation

$$(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)^2+x^2-y^2+2z^2+4x-2z+4,5=0$$

représente deux plans? Montrer que l'intersection de ces deux plans passe par un point fixe. (Introduire la variable auxiliaire

$$P=\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta;$$

cf. n° 582.)

6. Soient un cercle de centre O, deux points M_1 et M_2 de son plan, P_1 et P_2 leurs polaires par rapport au cercle, d_1 et d_2 les distances de M_1 à P_2 et de M_2 à P_1. Démontrer que l'on a $\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{OM_1}{OM_2}$ (*théorème de Salmon*). (*Cf.* Chap. XXVIII, Exercice résolu n° 11.)

7. On donne une parabole P et un cercle C, ayant pour centre le foyer de P. Trouver l'enveloppe des polaires des points de C par rapport à P. (É. P., 1913.)

8. Trouver l'enveloppe des polaires d'un point donné et le lieu des pôles d'une droite donnée par rapport aux cercles inscrits dans un angle donné. Combien y a-t-il de ces cercles qui sont conjugués par rapport à deux points ou deux droites donnés? Discuter leur réalité.

9. Lieu des pôles des normales à une hyperbole. (É. P., 1913.)

10. Lieu des points de contact des tangentes menées par un point fixe P aux coniques circonscrites à un rectangle. Cas où P est à l'infini. (É. P., 1913.)

11. Trouver l'enveloppe des plans polaires du point $P(1, 2, -1)$ par rapport aux quadriques

$$x^2+2y^2-\lambda z^2+2zx+4xy-2\lambda^2 x+2y-2\lambda z+\lambda^2=0.$$

12. Trouver le lieu des cercles de contact des cônes circonscrits aux sphères d'un faisceau à partir d'un point fixe.

13. On considère un ellipsoïde et une sphère concentrique, et l'on prend les plans polaires d'un point M par rapport à ces deux surfaces. Ces plans se coupent suivant une droite Δ.

1° Lieu de Δ quand M décrit une droite D.

2° Lieu de M pour que Δ passe par un point fixe P. Degré du cône décrit par Δ.

3° Relation géométrique entre deux points M et M′ pour que les droites Δ et Δ' correspondantes se coupent.

4° Lieu Γ de M pour que Δ soit dans un plan fixe Π. Montrer que ce lieu est une courbe unicursale. Enveloppe E de Δ.

5° Si M décrit le plan Π, Δ est une sécante double de Γ et réciproquement.

6° Lieu de Δ quand M décrit la courbe E ou une de ses tangentes.

(Agrégation, 1896.)

(Chaque droite Δ est perpendiculaire à sa conjuguée par rapport à l'ellipsoïde. *Cf.* Chap. XXVII, Exercice proposé n° 14.)

14. Mener, par la droite $x = 2y = z - 1$, les plans tangents à la quadrique

$$x^2 - y^2 - 2z = 0. \qquad (\text{É. C., } 1913.)$$

15. Montrer qu'on obtient le quadrilatère gauche le plus général qu'on puisse tracer sur une quadrique, en joignant deux à deux les points de rencontre de celle-ci avec deux droites conjuguées.

16. Trouver les équations de la droite conjuguée de la droite

$$2x - 5y + z + 2 = 0, \qquad x + 3y - z - 4 = 0$$

par rapport à la quadrique

$$2x^2 + y^2 - 3z^2 + 2yz - 3zx + 3x + y = 0.$$

17. Les coordonnées pluckériennes tétraédriques d'une droite Δ étant définies par les formules (1) de l'Exercice résolu n° 4 du Chapitre XXVII, calculer, en fonction de $\alpha, \beta, \ldots, n$, les coordonnées $\alpha', \beta', \ldots, n'$ de la droite Δ' conjuguée de Δ par rapport à la quadrique Q :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 = 0.$$

Montrer que si Δ appartient au complexe tétraédral étudié dans l'Exercice précité, il en est de même de Δ' et les deux droites percent la face ABC en deux points conjugués par rapport à une infinité de coniques fixes. Réciproquement, si ces deux points sont conjugués par rapport à une conique fixe du plan ABC autre que la section de la quadrique Q, les droites Δ et Δ' engendrent un complexe tétraédral.

[$x' = \mathrm{BC}l$, $l' = \mathrm{D}\Delta x$ et formules analogues.]

18. Démontrer le théorème de Dupin (n° 344) pour deux tangentes conjuguées à une quadrique.

19. Soient une conique conjuguée au triangle ABC et M un quelconque de ses points. Les droites MB et MC la rencontrent en b et c. Démontrer que la droite bc passe par A (Chasles).

20. Calculer les équations tangentielles des coniques

$$x^2 - 3xy - y^2 + 2x + y - 1 = 0,$$
$$axy + bx + cy = 0,$$
$$\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 = 1,$$
$$x^2 + 2\lambda xy + y^2 + 2(x + y) = 0.$$

21. Calculer les équations tangentielles des quadriques

$$y^2 + 2z^2 + 4yz - 2xy + 6x + \lambda = 0,$$
$$\mathrm{A}yz + \mathrm{A}'zx + \mathrm{A}''xy + \mathrm{B}x + \mathrm{B}'y + \mathrm{B}''z = 0,$$
$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{C}z^2 + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z = 0,$$
$$3x^2 + y^2 - 2z^2 + yz - zx + 4xy + 2x + 2y - 2z - 1 = 0.$$

22. Reprendre l'Exercice résolu n° 5 avec l'équation

$$u^2 + 2\lambda vw + 2uw + 2vr + \lambda^2 r^2 = 0.$$

23. Que représente l'équation

$$2u^2 - 2uv + uw - vw + 2ur + rw = 0 ?$$

24. Étudier les cas de décomposition de la conique (Γ) de l'Exercice résolu n° 1 du Chapitre XX.

25. Trouver le pôle de la droite $(2, -5, 1)$ par rapport à la conique

$$u^2 - 3uv + 2v^2 + 4ur - vr + r^2 = 0.$$

26. Trouver le pôle du plan $x - 2y + z + 4 = 0$ par rapport à la quadrique de l'Exercice 22. Quel est son lieu quand λ varie ?

27. Chercher les génératrices des quadriques

$$x^2 - y^2 - z^2 - yz - zx - xy - x - y = 0,$$
$$(x + y)^2 + (z - 1)^2 = x^2 + y^2,$$
$$x^2 - y^2 + zx - zy - x - y - 5z = 0.$$

28. Une quadrique contient Ox et Oy. Par un point fixe A de xOy, on mène une sécante variable, qui rencontre Ox en P et Oy en Q. On demande le lieu du point de rencontre M des génératrices, autres que Ox et Oy, qui passent par P et Q. (É. P., 1913.)

[Solution analytique, en prenant pour équation de la quadrique

$$xy + z(Ax + By - Cz + D) = 0.$$

Le lieu est la section par le plan

$$xy_0 + yx_0 + z(Ax_0 + By_0 - D) = 0.$$

Solution géométrique en considérant les plans OxM et OyM, qui se correspondent homographiquement.]

29. Soient une quadrique Q, P un de ses points, C une de ses sections planes, H un plan quelconque. On projette C sur H, à partir du point P. Montrer que la projection passe par les points de rencontre de H avec les génératrices de Q qui passent par P.

30. Chercher les génératrices des quadriques définies par les équations tangentielles

$$u(u + v) = (v + 2r)(2w + r),$$
$$uv = w^2 - r^2,$$
$$u^2 - v^2 + uv - vw - ru - 2rv - rw = 0.$$

(Même méthode qu'en coordonnées ponctuelles.)

CHAPITRE XXX.

CLASSIFICATION DES COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ; POINTS A L'INFINI, CENTRES, DIAMÈTRES, PLANS DIAMÉTRAUX.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Reconnaître la quadrique*

$$(1)\quad x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 4yz - 6zx + 2xy + 8x - 4y + 2\lambda z + \lambda^2 = 0.$$

Coordonnées et lieu de son centre. Nature et lieu de la courbe de contact du cylindre circonscrit parallèlement à la droite de paramètres directeurs $(2, 1, -1)$. *Lieu du diamètre conjugué du plan*

$$(2)\qquad 3x + y - z = 0$$

et des points de contact des plans tangents parallèles à ce plan. Séparer, sur tous ces lieux, les points qui correspondent à des quadriques de nature différente.

Décomposons en carrés; en prenant successivement x, y, z pour variables directrices, nous obtenons, tous calculs faits,

$$(3)\quad (x + y - 3z + 4)^2 - \frac{1}{3}(-3y + 5z - 6)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}z + \lambda + 2\right)^2 + \frac{\lambda^2 - 12\lambda - 28}{4} = 0.$$

Il faut connaître le signe du terme constant. Le trinome en λ a pour racines 14 et -2. Donc, *si* λ *est compris entre* -2 *et* 14, *on a un hyperboloïde à une nappe; si* $\lambda < -2$ *ou si* $\lambda > 14$, *on a un hyperboloïde à deux nappes; pour* $\lambda = -2$ *ou* 14, *on a un cône réel.*

Les trois plans

$$(4)\quad x + y - 3z + 4 = 0, \qquad -3y + 5z - 6 = 0, \qquad \frac{4}{3}z + \lambda + 2 = 0$$

sont trois plans diamétraux conjugués (n° 465); donc, ils se coupent au

centre C. Les deux premiers sont indépendants de λ ; *leur intersection* D *est donc le lieu de ce point*. La cote est donnée par la troisième équation ; puis, y par la seconde et x par la première ; on obtient ainsi

$$(5) \qquad x = -\frac{1}{4} - \lambda, \qquad y = -\frac{9}{2} - \frac{5}{4}\lambda, \qquad z = -\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\lambda,$$

qui, lorsque λ varie, sont les équations paramétriques de la droite D.

Si l'on appelle C_1 et C_2 les points qui correspondent à $\lambda = -2$ et $\lambda = 14$, on voit que les centres d'hyperboloïdes à une nappe sont les points du segment C_1C_2 ; les centres d'hyperboloïdes à deux nappes sont les points extérieurs à ce segment ; enfin, les sommets des deux cônes sont C_1 et C_2.

On arriverait aux mêmes résultats en prenant les équations (35) du n° 461. Nous laissons au lecteur le soin de faire ces calculs.

La courbe de contact du cylindre circonscrit parallèlement à la direction (2, 1, −1) est la section γ de la surface par le plan diamétral conjugué de cette direction, lequel a pour équation (n° 463)

$$2(x + y - 3z + 4) + (x - 2y + 2z - 2) - (-3x + 2y + 2z + \lambda) = 0$$

ou

$$(6) \qquad 6x - 2y - 6z + 6 - \lambda = 0.$$

Pour avoir la nature de cette conique, cherchons ses points à l'infini, en coupant le cône des directions asymptotiques

$$(7) \qquad x^2 - 2y^2 + 2z^2 + 4yz - 6zx + 2xy = 0$$

par le plan (n° 460)

$$(8) \qquad 3x - y - 3z = 0.$$

Éliminons, par exemple, y ; nous obtenons le faisceau des projections des directions asymptotiques sur zOx :

$$11x^2 - 36xz + 28z^2 = 0.$$

Le discriminant est 16. Donc, les directions asymptotiques sont réelles [1] et la conique *est une hyperbole*.

---

[1] Elles sont définies par l'équation (8) et les suivantes :

$$x - 2z = 0 \qquad \text{et} \qquad 11x - 14z = 0.$$

Leurs paramètres directeurs sont (2, 3, 1) et (14, 9, 11).

L'équation du *lieu engendré par cette hyperbole* quand λ varie s'obtient en éliminant λ entre (1) et (6); on trouve, tous calculs faits,

$$(9)\qquad 37x^2+2y^2+26z^2+24yz-66zx-22xy+80x-28y-60z+36=0.$$

Pour reconnaître cette quadrique, décomposons en carrés, en prenant successivement pour variable directrice y, z, x :

$$(10)\qquad \frac{1}{2}(2y-11x+12z-14)^2-\frac{1}{46}(-46z+33x-54)^2+\frac{4}{23}(x+10)^2-16=0.$$

Le lieu est un *hyperboloïde à une nappe*.

Soient P_1 et P_2 les plans (6) qui correspondent à $\lambda=-2$ et $\lambda=14$. La zone de l'hyperboloïde ci-dessus comprise entre les plans P_1 et P_2 est le lieu des courbes de contact des hyperboloïdes (1) à une nappe; la zone extérieure correspond aux hyperboloïdes à deux nappes; enfin les sections par P_1 et P_2 correspondent aux cônes, ce qui prouve que ces sections doivent être des droites, autrement dit que les plans P_1 et P_2 sont tangents à (9).

Nous allons vérifier directement cette dernière propriété, à titre de contrôle des calculs précédents, qui sont assez compliqués, et aussi à titre d'exercice. Nous allons nous servir de l'équation réduite déduite de (10) :

$$(11)\qquad \frac{X^2}{2}-\frac{Y^2}{46}+\frac{4}{23}Z^2-16=0,$$

en posant

$$(12)\qquad 2y-11x+12z-14=X,\quad -46z+33x+54=Y,\quad x+10=Z.$$

En tirant x, y, z de ces formules et portant dans (6), on obtient l'équation transformée

$$(13)\qquad \frac{X}{2}+\frac{3Y}{46}+\frac{8Z}{23}-\frac{\lambda}{2}-3=0.$$

D'autre part, l'équation tangentielle de (11) est (n° 550)

$$(14)\qquad 32u^2-46\times16v^2+23\times4w^2-r^2=0.$$

Écrivons que le plan (13) la vérifie :

$$8-\frac{16\times9}{46}+\frac{4\times64}{23}-\left(\frac{\lambda}{2}-3\right)^2=0$$

ou

$$8+\frac{8}{23}(32-9)-\left(\frac{\lambda}{2}-3\right)^2=0,$$
$$\left(\frac{\lambda}{2}-3\right)^2=8+\frac{8\times 23}{23}=16,$$
$$\frac{\lambda}{2}-3=\pm 4,\qquad \lambda=\begin{cases}-2,\\+14.\end{cases}$$

On retrouve bien les λ des plans P_1 et P_2.

Le diamètre conjugué Δ du plan (2) par rapport à (1) a pour équations (n° 464)

$$(15)\qquad \frac{x+y-3z+4}{3}=\frac{x-2y+2z-2}{1}=\frac{-3x+2y+2z+\lambda}{-1}.$$

En égalant les deux premiers rapports, on a une équation indépendante de λ, qui représente un plan Q, lieu de Δ :

$$(16)\qquad 2x-7y+9z-10=0.$$

La droite Δ est ensuite dans le plan obtenu en égalant les deux derniers rapports :

$$(17)\qquad 2x-4z+2-\lambda=0.$$

Pour $\lambda=-2$ et 14, on obtient deux droites Δ_1 et Δ_2, entre lesquelles se trouvent les droites Δ correspondant à des hyperboloïdes à une nappe, etc.

Les points de contact des plans tangents parallèles au plan (2) sont à l'intersection de la quadrique (1) avec la droite Δ. Leur lieu est une courbe Γ du plan Q, dont la seconde équation s'obtient en éliminant λ entre (1) et (17) :

$$(18)\qquad \begin{aligned}5x^2-2y^2+10z^2+4yz-18zx\\+2xy+16x-4y-12z+4=0.\end{aligned}$$

La courbe Γ est donc une conique. Cherchons son genre. Les directions asymptotiques ont pour projection sur yOz

$$\frac{5}{7}(7y-9z)^2-2y^2+10z^2+4yz+(7y-9z)(y-9z)=0$$

ou

$$265y^2+769z^2-902yz=0.$$

Le discriminant est -384 : donc *la courbe* Γ *est une ellipse*.

Cherchons son centre. Il est à l'intersection du plan Q avec le diamètre

conjugué de ce plan par rapport à (18) (n° 464) :

$$(19)\qquad \frac{5x+y-9z+8}{2} = \frac{x-2y+2z-2}{-7} = \frac{-9x+2y+10z-6}{9}.$$

En résolvant le système linéaire (16), (19), on trouve

$$x=0,16, \qquad y=-0,50, \qquad z=0,94.$$

2. *Discuter la nature de la quadrique*

$$(1)\qquad (\alpha x+\beta y+\gamma z)^2+z(ax+by)+ux+vy+wz+r=0.$$

Les coefficients étant tous littéraux, la méthode de la décomposition en carrés paraît devoir donner des calculs compliqués. Nous allons d'abord *chercher le genre*.

Le cône des directions asymptotiques est toujours réel, car on en aperçoit tout de suite deux génératrices réelles, intersections du plan

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0$$

avec les plans $z=0$ et $ax+by=0$. Voyons s'il peut se décomposer. Pour cela, il faut que les trois formes linéaires $\alpha x+\beta y+\gamma z$, z, $ax+by$ soient dépendantes, sans quoi les termes du second degré seraient une somme de trois carrés indépendants. La condition pour qu'il en soit ainsi est

$$(2)\qquad \alpha b-\beta a=0.$$

Ne poussons pas plus loin, pour l'instant, la discussion du genre et commençons notre discussion générale.

Premier cas : $\alpha b-\beta a\neq 0$. — La quadrique est du *genre hyperboloïde*. Remarquons maintenant que le plan $z=h$ donne une section parabolique. Pour une valeur convenable de h (qui sera la cote du centre), cette section doit se décomposer en deux droites parallèles (section par un plan asymptote). Suivant que ces deux droites sont réelles, imaginaires ou confondues, la quadrique est un hyperboloïde à une nappe, un hyperboloïde à deux nappes ou un cône.

Interprétons ceci analytiquement. Posons, pour abréger l'écriture, $\alpha x+\beta y+\gamma h=p$. La section par le plan $z=h$ a pour équation

$$(3)\qquad p^2+h(ax+by)+ux+vy+wh+r=0.$$

Pour qu'elle se décompose, il faut que la droite représentée par les termes autres que p^2 soit parallèle à $p = 0$. Cela donne la condition

$$\frac{ha + u}{\alpha} = \frac{hb + v}{\beta}.$$

On en tire

$$h = \frac{\beta u - \alpha v}{\alpha b - \beta a}, \qquad \rho = \frac{ub - va}{\alpha b - \beta a}, \tag{4}$$

en appelant ρ la valeur commune des deux rapports. L'équation (3) s'écrit alors

$$p^2 + \rho p + (w - \rho\gamma)h + r = 0. \tag{5}$$

Elle représente deux droites, dont la condition de réalité est

$$\rho^2 - 4[(w - \rho\gamma)h + r] > 0, \tag{6}$$

où il suffit de remplacer ρ et h par (4).

En définitive, *suivant que le premier membre de* (6) *est positif, négatif ou nul, la quadrique est un* H_1, *un* H_2 *ou un cône.*

Deuxième cas : $\alpha b - \beta a = 0$. — Supposons d'abord que α *et* β *ne soient pas tous deux nuls.* Nous pouvons alors poser $a = k\alpha$, $b = k\beta$. L'équation du cône des directions asymptotiques s'écrit, en posant $\alpha x + \beta y = q$,

$$\gamma^2 z^2 + zq(k + 2\gamma) + q^2 = 0. \tag{7}$$

Elle est homogène en z, q et représente deux plans, dont la condition de réalité est

$$(k + 4\gamma)k > 0. \tag{8}$$

Suivant que le premier membre est positif, négatif ou nul, la quadrique est du genre paraboloïde hyperbolique, paraboloïde elliptique ou cylindre parabolique.

Laissons de côté, pour le moment, la dernière hypothèse. Pour distinguer si nous avons affaire à un paraboloïde ou à un cylindre, coupons par la droite

$$z = 0, \qquad q = 0, \tag{9}$$

qui est parallèle à l'intersection des plans directeurs. Si la quadrique est un paraboloïde, nous devons avoir un point de rencontre à distance finie. Or, si l'on tient compte de (9), l'équation (1) se réduit à

$$ux + vy + r = 0. \tag{10}$$

Il faut qu'elle rencontre la droite $q = 0$, ce qui exige $u\beta - v\alpha \neq 0$. *Dans cette hypothèse, la quadrique est un* P_H *ou un* P_E, *suivant qu'on a* (8) *ou l'inégalité contraire.*

Si $u\beta - v\alpha = 0$, la surface est un *cylindre hyperbolique ou elliptique*. Il se décompose en deux plans sécants, s'il n'y a qu'un seul plan $z = h$ qui coupe suivant une droite double. Or, si l'on tient compte des hypothèses actuelles, l'équation (3) est du second degré en p. En écrivant qu'elle a une racine double, on a une équation du second degré en h (qui donne les plans tangents parallèles à xOy). En écrivant que cette équation a, à son tour, une racine double, on obtient la *condition de décomposition en deux plans sécants :*

$$(11) \qquad m^2\gamma^2 - uv(k + 2\gamma) + w^2 + rk(k + 4\gamma) = 0.$$

Il reste à examiner les cas $k = 0$ et $4\gamma + k = 0$, puis $\alpha = \beta = 0$. Nous laissons au lecteur le soin de le faire, cette discussion devenant fastidieuse.

3. *Que représente l'équation tangentielle*

$$(1) \qquad u^2 + 2uv - v^2 + 4uw - 6vw + w^2 = 0 ?$$

Cherchons les asymptotes. L'équation tangentielle du centre est

$$(2) \qquad 2u - 3v + w = 0.$$

En tirant w et portant dans (1), on a l'équation

$$(3) \qquad 3u^2 + 10v^2 - 14uv = 0,$$

qui, avec (2), détermine les asymptotes. Le discriminant de (3) est 16 ; il est positif. Donc, les asymptotes sont réelles; *la conique est une hyperbole.*

4. *Que représente l'équation tangentielle*

$$(1) \qquad \lambda u^2 - 2v^2 - w^2 + 2uw + 4ru - 2rv + r^2 = 0 ?$$

Chercher le centre. Montrer que le plan diamétral conjugué de Oy *passe par une droite fixe, quand* λ *varie.*

Décomposons en carrés, en prenant r, puis w, puis v pour variables directrices. On trouve

$$(2) \quad (r + 2u - v)^2 - (w - u)^2 - \frac{1}{3}(3v - 2u)^2 + \left(\lambda - \frac{5}{3}\right)u^2 = 0.$$

Si l'on prend les points $x - 2u - v = 0$, $w - u = 0$, $3v - 2u = 0$ comme origine, point à l'infini sur Oy et point à l'infini sur Oz, sans changer le point à l'infini sur Ox, on a une équation réduite de la forme

$$(3) \qquad X^2 - Y^2 - W^2 + \left(\lambda - \frac{5}{3}\right)U^2 = 0.$$

Si $\lambda - \frac{5}{3} \neq 0$, l'équation ponctuelle correspondante est (n° 550)

$$\frac{X^2}{\lambda - \frac{5}{3}} - Y^2 - Z^2 + 1 = 0.$$

Suivant que $\lambda - \frac{5}{3}$ est positif ou négatif, la surface est un *hyperboloïde à une nappe ou un ellipsoïde*.

Si $\lambda = \frac{5}{3}$, l'équation (3) nous montre que nous avons affaire à *une ellipse*. Les coordonnées de son plan annulent les trois carrés :

$$x - 2u - v = 0, \qquad w - u = 0, \qquad 3v - 2u = 0;$$

d'où l'on tire

$$v = \frac{2}{3}u, \qquad w = u, \qquad x = \frac{7}{3}u.$$

L'équation du plan de l'ellipse est donc

$$(4) \qquad x + \frac{2}{3}y + z - \frac{7}{3} = 0.$$

Dans tous les cas, *l'équation tangentielle du centre* est

$$(5) \qquad x + 2u - v = 0.$$

Ses coordonnées sont donc $2, -1, 0$.

Les coordonnées du plan diamétral conjugué de Oy s'obtiennent en écrivant que le pôle de ce plan est à l'infini sur Oy, ce qui donne les trois équations

$$x - 2u - v = 0, \qquad \lambda u + w + 2v = 0, \qquad u - w = 0;$$

d'où l'on tire

$$w = u, \qquad v = \frac{u(1+\lambda)}{2}, \qquad x = \frac{3-\lambda}{2}u.$$

L'équation du plan diamétral est donc

$$2x + (3-\lambda)y + 2z - (1+\lambda) = 0.$$

Lorsque λ varie, ce plan passe par la droite fixe :

$$y + 1 = 0, \qquad x + z - 2 = 0.$$

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Reconnaître les coniques suivantes, trouver leurs centres et écrire leurs équations réduites :

$$x^2 + 4xy + 5y^2 + 3x - 2y - \lambda = 0.$$
$$2x^2 + 8xy + 3y^2 - 6x - 7y + \lambda = 0,$$
$$3x^2 + xy - 2y^2 - x - y + \lambda = 0,$$
$$x^2 + 6xy + 9y^2 - 5x + y + \lambda = 0,$$
$$4x^2 - 12xy + 9y^2 + 6x - 9y + \lambda = 0.$$

2. Même question pour les quadriques :

$$10x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2yz + 6zx + 4xy + 2x + 2y + 2z + \lambda = 0,$$
$$10x^2 + 3y^2 + 2yz + 6zx + 4xy + 2x + 6y - 2z + \lambda = 0,$$
$$x^2 + 5y^2 + z^2 - 2yz + 4xy + 4x - 2y + 2z + \lambda = 0,$$
$$x^2 - 4z^2 + 8yz + 4xy + 2x + 10y + 8z + \lambda = 0,$$
$$2x^2 + 5y^2 + z^2 - 2yz - 2zx + 6xy + 2y + 2z + \lambda = 0,$$
$$3y^2 - z^2 - 2yz + 2zx + 2xy + 4x + 6y - 2z + \lambda = 0,$$
$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz - 2zx + 4xy - 2x - 4y + 2z + \lambda = 0,$$
$$9x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 6zx - 6xy + 5x - y + z + \lambda = 0.$$

3. Nature et centres des coniques de l'espace :

$$\begin{cases} yz + zx + xy - 2x - 2y - 2z = 0, \\ 2x - 5y + z + 1 = 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 8yz - 2zx + 4xy + x + 2y = 0, \\ x - y - z = 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} (x + 2y + z)^2 - (y - x)^2 + 3x + 1 = 0, \\ 3y + z = 0. \end{cases}$$

4. Trouver le lieu des centres des coniques

$$(ax + by)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) + \lambda xy = 0,$$

où λ désigne un paramètre variable. Distinguer les centres d'ellipse des

centres d'hyperbole. (Extrait de la composition du concours d'admission à l'É. N. S. en 1877.)

5. On considère les deux hyperboles H et H′ :

$$xy + \lambda(bx - ay) - ab = 0, \qquad xy + \mu(bx + ay) + ab = 0.$$

Montrer que la polaire P du centre de H par rapport à H′ coïncide avec la polaire du centre de H′ par rapport à H. Lieu du milieu des centres lorsque $\lambda^2 + \mu^2 = a$. Montrer que ce lieu coïncide avec l'enveloppe de P. (Extrait de la composition du concours d'admission à l'É. P., en 1886.)

6. Lieu du centre de la quadrique

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 + \lambda z(x - a + \mu y) = 0,$$

lorsque λ et μ varient. Séparer les centres des différents genres de quadriques.

(Concours académiques de Nancy et Besançon, 1879.)

7. Lieu des centres des quadriques

$$\lambda(x^2 - zx) + \mu(x^2 - y) + \nu(xy - z) = 0. \qquad (\text{É. P., 1913.})$$

8. Quelle relation doit lier δ à α, β, γ pour que toutes les quadriques

$$yz + zx + xy + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

soient égales?

(Porter l'origine au centre.)

9. Mener aux première et troisième quadriques de la question n° 2 les plans tangents parallèles au plan $3x + y - 3z = 0$ et les plans tangents parallèles à la droite $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{3z}{2}$.

10. Mener aux cinquième, sixième et huitième quadriques de la question n° 2 les plans tangents perpendiculaires au plan de la question n° 9.

11. On considère les quadriques Σ de l'Exercice proposé n° 35 du Chapitre XXXIII. Trouver le lieu de leurs centres, ainsi que le lieu des sommets des quadriques Σ qui sont des cônes. Lieu du centre de la courbe de contact du cône circonscrit à partir du centre de Γ.

12. On joint le milieu de la corde AB d'une conique au point de rencontre des tangentes A et B. Montrer que la droite obtenue est un diamètre. Cas de la parabole.

13. On joint un point d'une conique à deux points diamétralement opposés. Montrer que les deux cordes obtenues, qui sont dites *cordes supplémentaires*, ont des directions conjuguées.

14. On projette une conique C sur un plan P à partir d'un point S. Chercher le centre de la projection.

(Prendre le pôle par rapport à C de la droite d'intersection du plan parallèle à P mené par S avec le plan de C.)

15. Soit un point fixe A d'une conique à centre. La tangente en ce point rencontre deux diamètres conjugués quelconques en deux points M et M'. Montrer que le produit $\overline{AM}.\overline{AM'}$ est constant et égal au carré du demi-diamètre conjugué de OA.

16. Soit une quadrique Q et une droite D. Trouver le lieu des centres des courbes de contact des cônes circonscrits à Q qui ont leurs sommets sur D.

(Conique du plan diamétral passant par D. On a des faisceaux homographiques dans ce plan.)

17. Même question, en supposant que le sommet décrit un plan P.

(Prendre pour axes trois diamètres conjugués, dont le diamètre conjugué de P.)

18. Discuter la nature de la quadrique de l'Exercice 7.

19. Trouver la nature, le centre et les asymptotes des coniques représentées par les équations tangentielles suivantes :

$$2u^2 + 5uv + v^2 - 2uw - 4vw + 3w^2 = 0,$$

$$uv - 2uw + 4vw - 2w^2 = 0,$$

$$3u^2 - 3v^2 - 8uv + 4uw - 2vw + w^2 = 0,$$

$$u^2 + 3uv + v^2 - 2uw + 5vw = 0,$$

$$2u^2 - 4v^2 - 7uv + w(2u + v) = 0.$$

20. Que représentent les équations tangentielles

$$7u^2 - 2v^2 - 5w^2 - 4vw - 2uw - 2uv + 12ur + 4r^2 = 0,$$

$$(u + v - w)^2 - (u + 2v)(v + 3w) + 2r^2 = 0,$$

$$2u^2 + 8v^2 - 8vw + 8wu - 14uv - 2ru - 2rv + 4rw - r^2 = 0,$$

$$3u^2 + uv + rw = 0,$$

$$2u^2 + 3v^2 + 3w^2 + 2uw + 2uv + 8vw + r(u + 2v - w) = 0,$$

$$u^2 + 4w^2 + 4uw + r(u - v) = 0,$$

$$u^2 - v^2 + 2w(u - v + 2r) + ru(\lambda + 1) + rv(\lambda - 1) + 2r^2 = 0.$$

Trouver les centres.

CHAPITRE XXXI.

DIRECTIONS PRINCIPALES; ÉQUATIONS RÉDUITES EN COORDONNÉES RECTANGULAIRES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Trouver les axes, les sommets et l'équation réduite de la quadrique*

$$(1)\quad 10x^2+5y^2-2z^2-2yz+6zx+4xy+2x+2y+2z-1=0.$$

Recherche des directions principales. — L'équation en S est

$$(2)\quad \begin{vmatrix} 10-S & 2 & 3 \\ 2 & 5-S & -1 \\ 3 & -1 & 2-S \end{vmatrix}=0$$

ou

$$(3)\quad S^3-17S^2+66S-25=0.$$

Les racines sont

$$S_1=0.12,\qquad S_2=5,07,\qquad S_3=11,81.$$

Pour chacune d'elles, les paramètres directeurs de la direction principale correspondante sont, par exemple, les mineurs de (2) relatifs aux éléments de la première ligne, soit

$$(4)\quad S^2-7S+9.\qquad 2S-7.\qquad 3S-17.$$

Cela nous donne les valeurs suivantes [1] :

OX.....	6,24	— 6,16	—15.71
OY.....	3,14	—24,1	10,93
OZ.....	60,5	16	17,6

[1] Pour OY, les expressions (4) donnent peu de précision, car elles conduisent à de petites valeurs, obtenues comme différences de grands nombres. Nous leur avons substitué les mineurs relatifs à la deuxième ligne, soit

$$2S-7,\qquad S^2-10S+11,\qquad -S+16.$$

A titre de contrôle, on peut vérifier l'orthogonalité des trois directions deux à deux.

Centre. — La surface est un ellipsoïde, puisque les trois racines sont de même signe. Elle a donc un centre unique, dont les coordonnées sont données par le système (n° 461)

$$10x + 2y + 3z + 1 = 0, \qquad 2x + 5y - z + 1 = 0,$$
$$3x - y + 2z + 1 = 0;$$

d'où l'on tire

$$x_0 = 0,6; \qquad y_0 = -0,8; \qquad z_0 = -1,8. \tag{5}$$

En menant par ce point les parallèles aux directions principales trouvées précédemment, *on a les axes.*

Équation réduite. — Si l'on porte l'origine au centre, le terme constant devient (n° 462)

$$x_0 + y_0 + z_0 + 1 = -1.$$

L'équation réduite est donc

$$0,42X^2 + 5,07Y^2 + 11,51Z^2 - 1 = 0. \tag{6}$$

Les *longueurs des demi-axes* sont $\frac{1}{\sqrt{0,42}}, \frac{1}{\sqrt{5,07}}, \frac{1}{\sqrt{11,51}}$, soit

$$a = 1,54; \qquad b = 0,444; \qquad c = 0,295. \tag{7}$$

Les *sommets* s'obtiennent en portant ces longueurs sur les axes de part et d'autre du centre. Pour avoir leurs coordonnées, il faut calculer les cosinus directeurs des directions principales. Ceux de OX, par exemple, sont 0,346; −0,342; −0,874. On en déduit les coordonnées des deux sommets de cet axe :

$$0,6 \pm 1,54 \times 0,346; \qquad -0,8 \mp 1,54 \times 0,342;$$
$$-1,8 \mp 1,54 \times 0,874,$$

soit

$$(1,134; -1,327; -3,148$$

pour le premier sommet et

$$(0,066; -0,273; -0,452)$$

pour le second. On trouve, de même, les coordonnées des sommets de OY

et de OZ :

$$(0,652; -1,201; -1,618), \quad (0,548; -0,399; -1,982);$$
$$(0,874; -0,727; -1,720), \quad (0,326; -0,873; -1,880).$$

2. *Trouver l'axe, les plans principaux, le sommet, le plan tangent au sommet et l'équation réduite du paraboloïde*

$$x^2 - 4z^2 + 8yz + 4xy + 2x + 10y + 8z = 0. \tag{1}$$

Axe. — On peut l'obtenir facilement, sans résoudre l'équation en S, par la méthode suivante. Nous connaissons sa direction, qui est la droite double du cône des directions asymptotiques. Il suffit de *considérer les plans perpendiculaires et de prendre leur diamètre conjugué* (n° 477).

La direction de l'axe satisfait aux trois équations dérivées des termes du second degré :

$$x + 2y = 0, \qquad x + 2z = 0, \qquad y - z = 0,$$

dont la compatibilité prouve qu'on a bien affaire à une quadrique du genre paraboloïde. On peut prendre pour paramètres directeurs : -2, 1, 1, et comme plan perpendiculaire :

$$-2x + y + z = 0. \tag{2}$$

Le diamètre conjugué de ce plan, c'est-à-dire l'axe cherché est défini par (n° 464)

$$\frac{x + 2y + 1}{-2} = \frac{2x + 4z + 5}{1} = \frac{4y - 4z + 4}{1} = \frac{7}{6}, \tag{3}$$

la valeur commune des trois rapports étant obtenue en multipliant, haut et bas, le premier rapport par -2, le second par 1, le troisième par 1 et ajoutant les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Sommet. — Il est donné par le système (1), (3).

Remarquons que l'équation (1) peut s'écrire, grâce à l'identité d'Euler,

$$x(x + 2y + 1) + y(2x + 4z + 5) + z(4y - 4z + 4) + x + 5y + 4z = 0. \tag{4}$$

En tenant compte de (3), elle devient

$$\frac{7}{6}(-2x + y + z) + x + 5y + 4z = 0. \tag{5}$$

Nous n'avons plus qu'une équation du premier degré en x, y, z. En la combinant avec les deux premières équations (3), par exemple, on trouve les *coordonnées du sommet :*

$$x = -2,175; \qquad y = -0,579; \qquad z = 0,130.$$

Plan tangent au sommet. — C'est le plan parallèle à (2) mené par le sommet. Son équation est donc

$$(6) \qquad -2x + y + z = 4,350 - 0,579 + 0,130 = 3,901.$$

Directions principales. — Pour trouver les plans principaux et l'équation réduite, cherchons les directions principales par l'équation en S. Celle-ci s'écrit

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} 1-S & 2 & 0 \\ 2 & -S & 4 \\ 0 & 4 & -4-S \end{vmatrix} = 0$$

ou, après suppression de la racine nulle,

$$S^2 + 3S - 24 = 0,$$

dont les racines sont $S_2 = 3,62$, $S_3 = -6,62$.

Prenons comme paramètres directeurs les mineurs de (7) relatifs à la troisième ligne, c'est-à-dire

$$(8) \qquad 8, \quad 4(S-1), \quad S(S-1) - 4;$$

nous obtenons les paramètres des directions OY et OZ :

$$8; \quad 10,5; \quad 5,48 \qquad \text{et} \qquad 8; \quad -30,5; \quad 46,5,$$

auxquels correspondent les cosinus

$$(9) \qquad \begin{aligned} a' &= 0,560; \qquad b' = 0,736; \qquad c' = 0,384; \\ a'' &= 0,143; \qquad b'' = -0,543; \qquad c'' = 0,828. \end{aligned}$$

Les cosinus directeurs de OX sont ensuite $bc'' - c'b''$, $c'a'' - a'c''$, $a'b'' - b'a''$, soit

$$(10) \qquad a = 0,819; \qquad b = -0,409. \qquad c = -0,409,$$

quantités proportionnelles aux paramètres directeurs -2, 1, 1 trouvés plus haut.

Les *équations des plans principaux* sont obtenues en prenant les plans

diamétraux conjugués de OY et de OZ, soit

$$8(x+2y+1)+10,5(2x+4z+5)+5,48(4y-4z+4)=0,$$
$$8(x+2y+1)-30,5(2x+4z+5)+46,5(4y-4z+4)=0$$

ou

$$(11)\qquad \begin{cases} 29x+37,9y+20,1z+82,4=0, \\ -53x+202y-308z+41,5=0. \end{cases}$$

Ces deux équations peuvent être regardées aussi comme les équations de l'axe.

Pour trouver l'équation réduite, appliquons la méthode du n° 475. Faisons d'abord tourner les axes. Les termes du second degré deviennent

$$3,62Y^2-6,62Z^2.$$

Il faut calculer directement ce que deviennent les termes du premier degré :

$$X(2a+10b+8c)+Y(2a'+10b'+8c')+Z(2a''+10b''+8c'')$$
$$=-5,72X+11,55Y+1,48Z.$$

Notre nouvelle équation est donc

$$(12)\qquad 3,62Y^2-6,62Z^2-5,72X+11,55Y+1,48Z=0$$

ou, en décomposant en carrés,

$$3,62(Y+1,59)^2-6,62(Z-0,11)^2-5,72(X+1,60)=0.$$

De sorte que l'équation réduite s'obtient en portant l'origine au point $(-1,60;\ -1,59;\ +0,11)$ et s'écrit

$$(13)\qquad 3,62Y^2-6,62Z^2-5,72X=0.$$

On aurait pu la déduire sans calculs de l'équation (12). La décomposition en carrés ci-dessus a eu simplement pour résultat de nous faire connaître les coordonnées du sommet par rapport aux axes OXYZ. On obtient les coordonnées de ce point par rapport à $Oxyz$ par les formules du changement de coordonnées :

$$x_0=-1,60a-1,59a'+0,11a''=-2,19;$$
$$y_0=-1,60b-1,59b'+0,11b''=-0,58;$$
$$z_0=-1,60c-1,59c'+0,11c''=+0,13.$$

On retrouve sensiblement les mêmes valeurs que plus haut.

3. *Calculer les coordonnées du sommet de la parabole*

$$y^2 - zx = 0, \qquad x + z - 2y = 1. \qquad \text{(É. P., 1913.)} \tag{1}$$

Menons, par l'origine, un plan parallèle au plan (1) :

$$x + z - 2y = 0. \tag{2}$$

Il coupe le cône suivant deux génératrices confondues avec la droite

$$x = y = z. \tag{3}$$

Il est donc tangent au cône et, par suite, la conique proposée est bien une parabole, dont *l'axe est parallèle à la droite* (3). La parallèle à la tangente au sommet menée par l'origine a pour équations

$$x + y + z = 0, \qquad x + z - 2y = 0$$

ou

$$y = 0, \qquad x = -z. \tag{4}$$

L'axe de la parabole est le diamètre conjugué de cette droite; il se trouve dans le plan diamétral conjugué de cette droite par rapport au cône, lequel a pour équation

$$z - x = 0. \tag{5}$$

L'axe considéré est donc défini par l'équation (5) et la seconde équation (1) ou encore par

$$z = x = y + \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Il coupe le cône en un seul point, de coordonnées $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, qui est le sommet demandé.

4. *Lieu des sommets des cônes de révolution passant par l'ellipse* E.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad z = 0. \tag{1}$$

Soit $P(\alpha, \beta, \gamma)$ le sommet d'un de ces cônes. L'équation du cône correspondant se forme par la méthode générale du n° 376, ce qui donne

$$\frac{(x\gamma - \alpha z)^2}{a^2} + \frac{(y\gamma - \beta z)^2}{b^2} - (\gamma - z)^2 = 0$$

ou, en ordonnant et ne conservant que les termes du second degré (n° 469),

$$x^2\frac{\gamma^2}{a^2}+y^2\frac{\gamma^2}{b^2}+z^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)-2\frac{\beta\gamma}{b^2}yz-\frac{2\alpha\gamma}{a^2}zx=0.$$

L'équation en S s'écrit

$$\Delta(S)\equiv\begin{vmatrix}\frac{\gamma^2}{a^2}-S & 0 & -\frac{\alpha\gamma}{a^2}\\ 0 & \frac{\gamma^2}{b^2}-S & -\frac{\beta\gamma}{b^2}\\ -\frac{\alpha\gamma}{a^2} & -\frac{\beta\gamma}{b^2} & \frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1-S\end{vmatrix}=0.$$

Elle doit avoir une racine double (n° 479), ce qui exige que tous les mineurs de $\Delta(S)$ soient nuls (n° 474). En annulant le mineur commun aux deux premières lignes et aux deux premières colonnes, on a

$$\left(\frac{\gamma^2}{a^2}-S\right)\left(\frac{\gamma^2}{b^2}-S\right)=0.$$

Prenons, pour fixer les idées, $S=\frac{\gamma^2}{b^2}$. En annulant les autres mineurs, on voit sans peine qu'on obtient les deux seules conditions

$$\beta=0,\qquad \frac{\alpha^2}{c^2}-\frac{\gamma^2}{b^2}-1=0, \tag{2}$$

qui constituent les équations du lieu et représentent une hyperbole H du plan des zx, admettant pour sommets les foyers et pour foyers les sommets de E (*cf.* n° 524).

L'axe du cône est perpendiculaire au plan des directions principales correspondant à la racine double $S=\frac{\gamma^2}{b^2}$. Ce plan a pour coefficients, par exemple, les éléments de la première ligne de $\Delta(S)$, soit

$$\gamma^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right),\quad 0,\quad -\frac{\alpha\gamma}{a^2}.$$

On en conclut que les paramètres directeurs de l'axe sont $\frac{\gamma}{b^2}$, 0, $\frac{\alpha}{c^2}$. Cet axe est donc dans le plan des zx et y admet pour équation

$$\frac{x-\alpha}{\frac{\gamma}{b^2}}=\frac{z-\gamma}{\frac{\alpha}{c^2}}$$

ou, en tenant compte de (2),

$$\frac{\alpha x}{c^2} - \frac{\gamma z}{b^2} - 1 = 0,$$

ce qui est l'équation de la tangente en P à H (cf. *loc. cit.*).

En prenant $S = \frac{\gamma^2}{a^2}$, on obtiendrait comme lieu une ellipse imaginaire du plan des yz (cf. *loc. cit.*).

5. *Trouver les axes et sommets de l'hyperbole de l'Exercice résolu n° 3 du Chapitre XXV.*

Soient (u, v, w) les coordonnées d'un des axes. Son pôle a pour coordonnées homogènes (n° 443)

$$(1) \qquad u + v + 2w, \qquad u - v - 3w, \qquad 2u - 3v + w.$$

Exprimons qu'il est à l'infini dans la direction perpendiculaire à l'axe; nous obtenons les deux conditions

$$(2) \qquad 2u - 3v + w = 0, \qquad \frac{u + v + 2w}{u} = \frac{u - v - 3w}{v}.$$

Éliminant w, nous obtenons l'équation

$$v^2 - u^2 + uv = 0,$$

qui nous donne

$$(3) \qquad v = \frac{u}{2}(-1 \pm \sqrt{5}).$$

Portant dans la première équation (2), nous avons ensuite

$$w = 3v - 2u = \frac{u}{2}(-7 \pm 3\sqrt{5}).$$

Les équations des deux axes sont donc

$$(4) \qquad 2x + (-1 \pm \sqrt{5})y - 7 \pm 3\sqrt{5} = 0.$$

Les tangentes aux sommets sont obtenues en combinant l'équation (3) avec l'équation de la conique, ce qui donne, en prenant, par exemple, $u = 2$ et $v = -1 \pm \sqrt{5}$,

$$(5) \qquad w^2 + 2w(7 \mp 3\sqrt{5}) + 6(\pm\sqrt{5} - 1) = 0.$$

Les racines ne sont réelles que si l'on prend les signes inférieurs devant $\sqrt{5}$; elles ont alors pour valeurs $+0,7$ et $-28,1$. Il serait maintenant facile d'écrire les équations des tangentes aux deux sommets réels. Si l'on veut les coordonnées homogènes de ceux-ci, il suffit de remplacer, dans (1), u par 2, v par $-1-\sqrt{5}$, et w par $0,7$ ou $-28,1$, ce qui donne $0,2$; $3,1$; $14,4$; ou $x=0,014$ et $y=0,216$ pour le premier sommet et $-57,4$; $89,5$; $-14,4$ ou $x=4$ et $y=6,22$ pour le second.

La longueur de l'axe réel est la distance des deux tangentes, soit

$$\frac{28,1+0,7}{\sqrt{u^2+v^2}}=7,6.$$

On peut vérifier que c'est aussi la distance des deux sommets.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. *Invariants.* — Les rapports des racines de l'équation en S d'une quadrique (conique) déterminée rapportée à des axes rectangulaires quelconques sont des invariants. Quelle est leur signification géométrique? Toute relation homogène entre lesdites racines est invariante.

Cône capable d'un trièdre trirectangle inscrit. — Pour qu'on puisse inscrire dans un cône du second degré un trièdre trirectangle, il faut et il suffit que la somme des racines de son équation en S soit nulle et, si cette condition est remplie, il y a une infinité de trièdres trirectangles inscrits dans le cône.

(S'appuyer sur les propriétés d'invariance ci-dessus, en prenant pour axes des x et des y deux génératrices rectangulaires du cône. *Cf.* n° 497.)

Quelle relation doit-il exister entre les coefficients tangentiels d'un cône du second degré pour qu'il soit *capable d'un trièdre trirectangle circonscrit?*

(Faire une transformation par plans polaires réciproques par rapport à la sphère $x^2+y^2+z^2+1=0$.)

2. Trouver les axes, sommets et équations réduites des coniques de l'Exercice proposé n° 1 du Chapitre XXX.

3. Même question pour les quadriques de l'Exercice n° 2.

4. Trouver l'équation de l'axe de la parabole (II) de l'Exercice proposé n° 16 du Chapitre XXXIII.

5. Soit une parabole P, de foyer F et une direction fixe Δ. A partir de chaque point M de P, on porte deux longueurs Mm et Mm' parallèles à Δ, égales à MF et de part et d'autre de M. Le lieu de m et m' se compose de deux paraboles P_1 et P_2.

1° Montrer que les axes de P_1 et P_2 sont rectangulaires et passent chacun par un point fixe, quand Δ varie; de plus, la somme des carrés des paramètres des deux paraboles reste constante.

2° Lieu des sommets de P_1 et de P_2, quand Δ varie. (É. P., 1891.)

6. 1° Calculer les équations des deux axes de la conique S de l'Exercice proposé n° 5 du Chapitre XXXIII.

2° On suppose que le centre de S décrive une droite passant par O. L'enveloppe des axes est alors une parabole, dont on cherchera l'axe, le sommet, la tangente au sommet, le foyer et la directrice.

7. Trouver les axes d'un cône ayant pour sommet le point S(α, β, γ) et pour base dans xOy le cercle de centre O et de rayon R.

8. Trouver le lieu des axes des paraboloïdes faisant partie des quadriques de l'Exercice proposé n° 6 du Chapitre XXX.

9. On considère les deux paraboloïdes de l'Exercice résolu n° 5 du Chapitre XXXIII.

1° Montrer que leurs axes se rencontrent en un point, dont on cherchera le lieu, quand T décrit S.

2° Lieu des sommets de ces paraboloïdes dans la même hypothèse.

(Agrégation, 1885.)

10. Calculer les coordonnées du sommet de la parabole

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-\lambda=0, \qquad \frac{x\cos\varphi}{a}+\frac{y\sin\varphi}{b}-\frac{z}{c}=\lambda.$$

Lieu de ce sommet quand λ varie.

(*Cf.* Exercice résolu n° 3.)

11. Calculer le rayon de la sphère de Monge de la quadrique

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=1.$$

(Somme des racines de l'équation aux carrés des demi-axes.)

12. Soient trois axes rectangulaires $Oxyz$. Sur Ox, on prend $OA = OA' = a$; sur Oy, $OB = OB' = b$, et sur Oz, $OC = OC' = c$.

1° Lieu des axes de révolution des quadriques de révolution passant par A, B, C, A′, B′, C′.

2° Lieu des sommets situés sur ces axes. (Concours général, 1878).

[Prendre pour paramètre la racine double de l'équation en S. Les coordonnées des sommets sont données par la formule

$$x^2 = \frac{\frac{1}{a^2} - S}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^2 - 5S\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + 6S^2}$$

et les deux formules analogues.]

13. Trouver les plans cycliques réels du cône

$$x^2 + y^2 + 4xy + \lambda(z^2 - 2xy) = 0.$$

Discuter suivant les valeurs de λ.

14. Même question pour le cône

$$x^2 + y^2 + z(ux + vy + wz) = 0.$$

15. Trouver les axes et sommets des coniques de l'Exercice proposé n° 17 du Chapitre XXX.

16. Même question pour les plans principaux des quadriques du n° 18.

CHAPITRE XXXII.

INTERSECTION DES CONIQUES ET QUADRIQUES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Trouver les points d'intersection des deux coniques*

$$x^2+2y^2-4x+2y=0, \qquad 2xy+1=0. \tag{1}$$

L'équation en λ est

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & -2 \\ \lambda & 2 & 1 \\ -2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou, en développant et ordonnant,

$$\lambda^3+2\lambda+9=0. \tag{2}$$

Elle n'a qu'une racine réelle, qui est approximativement $-1,74$. On peut en conclure de suite *que les coniques proposées ne se coupent qu'en deux points réels* (n° 485). Pour les obtenir, cherchons les deux droites de décomposition de la conique

$$x^2+2\lambda xy+2y^2-4x+2y+\lambda=0, \tag{3}$$

λ ayant la valeur ci-dessus. A cet effet, décomposons (3) en carrés (n° 430); nous obtenons, en remarquant que le terme constant est nul, en vertu de (2),

$$(x+\lambda y-2)^2-\frac{1}{\lambda^2-2}[(\lambda^2-2)y+2\lambda+1]^2=0. \tag{4}$$

En remplaçant λ par sa valeur, cela nous donne les deux droites

$$x=2,76y-0,44, \qquad x=0,72y+4,44. \tag{5}$$

En y remplaçant x par $-\frac{1}{2y}$, on obtient les équations aux y des

points d'intersection :

$$1+5,52y^2-0,88y=0, \qquad 1+1,44y^2+8,88y=0.$$

La seconde seule a ses racines réelles :

$$y_1=-6,05. \qquad y_2=-0,11. \tag{6}$$

Pour calculer x_1, nous portons y_1 dans $x=-\frac{1}{2y}$, ce qui nous donne $x_1=+0,083$. Pour calculer x_2, il est plus précis d'utiliser la seconde équation (5); on obtient ainsi $x_2=+4,36$.

Il n'y a *qu'un seul pôle double réel*, intersection des droites (5), ou encore des droites obtenues en annulant les carrés de (4). Le deuxième de ces carrés donne $y=2,41$ et le premier donne ensuite $x=6,20$.

2. *Soient deux points* A *et* A′ *et un cercle* C, *tangent en* A *à* AA′. *Trouver les coniques tangentes à ce cercle et admettant* AA′ *pour axe. Discuter leur réalité et leur nature. Trouver le lieu du point de contact, quand* C *varie en restant tangent en* A *à* AA′.

Prenons AA′ pour axe des x et le milieu de AA′ pour origine. Posons $AA'=2a$. L'équation générale des coniques admettant AA′ pour axe est

$$x^2+ky^2-a^2=0, \tag{1}$$

k étant un paramètre arbitraire.

L'équation du cercle C est, d'autre part, de la forme

$$x^2+y^2-2ax-2\beta y+a^2=0. \tag{2}$$

Exprimons que les coniques (1) et (2) sont tangentes, en écrivant que *leur équation en* λ *admet une racine double* (n° 485). Cette équation est

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 0 & -a \\ 0 & 1+k\lambda & -\beta \\ -a & -\beta & a^2(1-\lambda) \end{vmatrix}=0$$

ou

$$\lambda^3 ka^2+\lambda^2 a^2+\lambda\beta^2+\beta^2=0. \tag{3}$$

Annulons les dérivées par rapport à λ et par rapport à la variable

d'homogénéité (t. I, n° 227) :

$$3k\alpha^2\lambda^2 + 2\alpha^2\lambda + \beta^2 = 0, \tag{4}$$

$$\alpha^2\lambda^2 + 2\beta^2\lambda + 3\beta^2 = 0. \tag{5}$$

Annulons enfin le résultant de ces deux équations du second degré (t. I, n° 234) :

$$\alpha^4\beta^4(9k-1)^2 - 4\alpha^2\beta^2(3k\beta^2 - \alpha^2)(3\alpha^2 - \beta^2) = 0 \tag{6}$$

ou, en divisant par $3\alpha^2\beta^2$ et ordonnant par rapport à k,

$$27\alpha^2\beta^2k^2 - 2\beta^2(9\alpha^2 - 2\beta^2)k + \alpha^2(4\alpha^2 - \beta^2) = 0. \tag{7}$$

Cette équation du second degré donne les valeurs de k correspondant aux coniques cherchées, lesquelles sont donc au nombre de *deux*.

Pour qu'elles soient réelles, il faut et il suffit que k le soit, c'est-à-dire qu'on ait

$$\beta^2(9\alpha^2 - 2\beta^2)^2 - 27\alpha^4(4\alpha^2 - \beta^2) \geq 0$$

ou, en ordonnant et divisant par 4,

$$(\beta^2 - 3\alpha^2)^3 \geq 0.$$

En définitive, *les deux coniques sont réelles si* $\beta > \alpha\sqrt{3}$, en supposant, pour fixer les idées, $\beta > 0$.

Le genre de chaque conique est indiqué par le signe de k.

Si $\beta > 2\alpha$, les deux racines de (7) sont de signes contraires; on a *une ellipse et une hyperbole*. *Si* $\beta < 2\alpha$, les deux racines sont positives, on a *deux ellipses*.

Remarque. — Si l'on substitue $k = 1$ dans le premier membre de (7), on obtient $4(\alpha^2 + \beta^2)^2$. D'autre part, la demi-somme des racines $\frac{9\alpha^2 - 2\beta^2}{27\alpha^2}$ est toujours plus petite que 1. Donc, les deux racines sont toujours inférieures à 1. Il s'ensuit que, lorsque la conique est une ellipse, AA′ est *son petit axe*.

Le point de contact de la conique et du cercle C est le point double de la conique dégénérée fournie par la racine double de (3), c'est-à-dire par la racine commune à (4) et (5). Ses coordonnées satisfont aux trois équations dérivées

$$x(1 + \lambda) - \alpha = 0, \tag{8}$$

$$y(1 + k\lambda) - \beta = 0, \tag{9}$$

$$\alpha x + \beta y + \alpha^2(\lambda - 1) = 0. \tag{10}$$

La compatibilité de ces trois équations entraîne d'ailleurs l'équation (3) et, par suite, l'une des équations (4) et (5), quand on suppose que l'autre est vérifiée. Il résulte de là qu'on peut avoir le lieu du point de contact en éliminant k, λ, β entre (8), (9), (10) et l'une ou l'autre des équations (4) et (5). Si l'on observe que k ne figure pas dans (8), (10) et (5), on est ramené à éliminer λ et β entre ces trois équations. De (8) et (10), on tire

$$\lambda = \frac{a - x}{x}, \qquad \beta = -\frac{a(x-a)^2}{xy}.$$

Portant dans (5), *on a l'équation du lieu*, soit, en divisant par $\frac{a^2(x-a)^2}{x^3y^2}$,

$$xy^2 + (x-a)^2(x+2a) = 0. \tag{11}$$

Si l'on porte l'origine au point A, cette équation devient

$$x(x^2+y^2) + a(y^2+3x^2) = 0. \tag{12}$$

On reconnaît une *cubique circulaire*, admettant A pour *point double isolé*, Oy pour asymptote et le symétrique de O par rapport à A′ pour sommet.

Cas où la conique est osculatrice au cercle C. — Ce cas est obtenu lorsque l'équation (3) admet une racine triple (n° 485), c'est-à-dire lorsque les équations (4) et (5) ont mêmes racines, ce qui exige

$$3k = \frac{a^2}{\beta^2} = \frac{1}{3},$$

c'est-à-dire

$$\beta = a\sqrt{3}, \qquad k = \frac{1}{9}.$$

Ce cas est précisément celui où l'équation (7) a une racine double, d'ailleurs égale à $\frac{1}{9}$, c'est-à-dire *le cas où les deux coniques tangentes à* C *sont confondues*. La racine triple en λ est alors égale à -3. Les coordonnées du point de contact, données par (8) et (9), sont

$$x = -\frac{a}{2}, \qquad y = \frac{3a\sqrt{3}}{2}.$$

3. *On donne une conique* S *et l'on considère un cercle variable* C *tangent à* S *en un point fixe* O. *On demande le lieu du point de rencontre* P *des tangentes communes à* S *et à* C. (É. P., 1913.)

Prenons le point O pour origine, la tangente en ce point a S pour axe des x et la normale pour axe des y. L'équation tangentielle de S est de la forme

$$\text{(1)} \qquad A u^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = 0.$$

Celle du cercle C est, en appelant β l'ordonnée de son centre,

$$(\beta v + w)^2 - \beta^2(u^2 + v^2) = 0$$

ou

$$\text{(2)} \qquad \beta^2 u^2 - 2\beta vw - w^2 = 0.$$

En éliminant u^2 entre les équations (1) et (2), nous obtiendrons une équation renfermant w en facteur et représentant, par conséquent, un couple d'ombilics comprenant l'origine. L'autre ombilic sera le point P. En faisant le calcul, on obtient ainsi pour équation tangentielle de ce point

$$2D\beta^2 u + 2(E\beta + A)\beta v + (F\beta^2 + A)w = 0.$$

On en déduit ses coordonnées cartésiennes

$$\text{(3)} \qquad x = \frac{2D\beta^2}{F\beta^2 + A}, \qquad y = \frac{2(E\beta + A)\beta}{F\beta^2 + A}.$$

En éliminant β, ce qui est immédiat, on obtient l'équation du lieu

$$\text{(4)} \qquad (Dy - Ex)^2 + Ax(Fx - 2D) = 0.$$

Sous cette forme, on reconnaît une conique Γ tangente en O à Oy et tangente à la droite $x = \frac{2D}{F}$ au point $A\left(\frac{2D}{F}, \frac{2E}{F}\right)$. Si l'on remarque que $\frac{D}{F}, \frac{E}{F}$ sont les coordonnées du centre de S (n° 468), on voit que le point A n'est autre que le point diamétralement opposé à O sur S; de plus, la conique Γ est orthogonale en O et en A à S.

On a des renseignements encore plus complets en comparant (4) à l'équation ponctuelle de S, qui est

$$\text{(5)} \qquad f \equiv E^2x^2 - 2DExy + y^2(D^2 - AF) + 2AEy = 0.$$

L'équation (4) s'écrit alors

$$\text{(6)} \qquad f + AF\left(x^2 + y^2 - 2\frac{D}{F}x - 2\frac{E}{F}y\right) = 0.$$

Elle montre que la conique Γ passe par les quatre points d'intersec-

tion de S avec le cercle concentrique qui passe par O. Autrement dit, *le lieu demandé est une conique coaxiale à* S *et orthogonale en* O *à* S.

Dans le cas particulier où $F = 0$, c'est-à-dire où S est une parabole, Γ est une parabole de même axe et orthogonale en O à S.

4. *Soit la surface* Σ, *d'équation*

$$\frac{x^2}{a^2 + kz} + \frac{y^2}{b^2 + kz} - 1 = 0. \tag{1}$$

On la coupe par un cylindre de génératrices parallèles à Oz *et ayant pour base un cercle* C *du plan des* xy.

1° *Montrer que la courbe* S *d'intersection est une biquadratique.*

2° *Il y a trois cônes du second degré contenant* S. *Montrer que deux d'entre eux,* Q_1 *et* Q_2, *ont leurs sommets respectifs sur deux droites fixes* D_1 *et* D_2. *Chacun de ces cônes subit une translation rectiligne, quand le rayon de* C *varie, son centre restant fixe.*

3° *Que doit être* C *pour que* S *se décompose en deux coniques ? Dans ce cas, il n'y a plus qu'un seul cône véritable du second degré passant par* S. *Montrer que ce cône passe par une conique fixe quand* C *varie, en satisfaisant à la condition précédemment trouvée.*

1° Soit

$$C \equiv x^2 + y^2 - (2\alpha x + 2\beta y + \gamma) = 0 \tag{2}$$

l'équation du cylindre. L'équation (1) peut s'écrire

$$kz(x^2 + y^2) + b^2 x^2 + a^2 y^2 - k^2 z^2 - kz(a^2 + b^2) - a^2 b^2 = 0. \tag{3}$$

En tenant compte de (2), elle devient

$$\begin{aligned} Q \equiv {} & kz(2\alpha x + 2\beta y + \gamma) \\ & + b^2 x^2 + a^2 y^2 - k^2 z^2 - kz(a^2 + b^2) - a^2 b^2 = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

La courbe S est l'intersection des quadriques (2) et (4); c'est donc bien une biquadratique.

2° Les cônes du second degré contenant S ont une équation de la forme

$$Q + \lambda C = 0, \tag{5}$$

λ devant être tel que les quatre équations dérivées

$$b^2x - \alpha kz + \lambda(x - \alpha) = 0, \tag{6}$$

$$a^2y + \beta kz + \lambda(y - \beta) = 0. \tag{7}$$

$$2\alpha x + 2\beta y + \gamma - 2kz - a^2 - b^2 = 0. \tag{8}$$

$$kz(\gamma - a^2 - b^2) - 2a^2b^2 - 2\lambda(\alpha x + \beta y + \gamma) = 0 \tag{9}$$

soient compatibles.

Résolvons les trois premières. A cet effet, nous tirons x de (6) et y de (7); mais, cela nécessite $(\lambda + a^2)(\lambda + b^2) \neq 0$. Commençons donc par nous débarrasser des cas où cette condition n'est pas remplie.

Premier cas : $\lambda = -a^2$. — L'équation (7) se réduit à

$$\beta(kz + a^2) = 0. \tag{10}$$

Si $\beta \neq 0$, on en tire $z = -\dfrac{a^2}{k}$. Portant dans (6), il vient $x = 0$, en supposant $a \neq b$. Portant enfin dans (8) et (9), on obtient deux fois l'équation

$$2\beta y + \gamma + c^2 = 0 \qquad (c^2 = a^2 - b^2). \tag{11}$$

Nos quatre équations sont donc actuellement compatibles et l'équation

$$Q_1 \equiv Q - a^2C = 0 \tag{12}$$

représente un cône Q_1, dont le sommet P_1 a pour coordonnées

$$\left(0, \quad -\frac{\gamma - c^2}{2\beta}, \quad -\frac{a^2}{k}\right).$$

Ce sommet décrit, lorsque C varie, la droite D_1, d'équations

$$x = 0, \qquad z = -\frac{a^2}{k}. \tag{13}$$

Lorsque le rayon de C seul varie, α et β sont constants et γ variable. Le sommet P_1 décrit la droite D_1. Mais, les termes du second degré de (12) sont visiblement indépendants de γ; donc, le cône Q_1 reste homothétique à lui-même. Autrement dit, il subit une translation parallèle à D_1.

Deuxième cas : $\lambda = -b^2$. — On obtient de même un cône Q_2, dont

le sommet P_2 décrit la droite D_2, d'équations

$$y = 0, \qquad z = -\frac{b^2}{k}. \tag{14}$$

Troisième cas : $(\lambda + a^2)(\lambda - b^2) \neq 0$. — De (6) et (7), on tire

$$x = \frac{\alpha(\lambda - kz)}{\lambda + b^2}, \qquad y = \frac{\beta(\lambda - kz)}{\lambda + a^2}. \tag{15}$$

Portant dans (8) et (9), il vient deux équations qui peuvent s'écrire

$$\begin{cases} 2(\lambda - kz)\left(\dfrac{\alpha^2}{\lambda + b^2} + \dfrac{\beta^2}{\lambda + a^2} + 1\right) + \gamma - a^2 - b^2 - 2\lambda = 0, \\ (\lambda - kz)\left[2\lambda\left(\dfrac{\alpha^2}{\lambda + b^2} + \dfrac{\beta^2}{\lambda + a^2}\right) + \gamma - a^2 - b^2\right] \\ \qquad + \lambda(\gamma + a^2 + b^2) + 2a^2b^2 = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Éliminons z ou, ce qui revient au même, $\lambda - kz$; nous obtenons

$$2\left(\frac{\alpha^2}{\lambda + b^2} + \frac{\beta^2}{\lambda + a^2} + 1\right)[\lambda(\gamma + a^2 + b^2) + 2a^2b^2]$$
$$+ (2\lambda + a^2 + b^2 - \gamma)\left[2\lambda\left(\frac{\alpha^2}{\lambda + b^2} + \frac{\beta^2}{\lambda + a^2}\right) + \gamma - a^2 - b^2\right] = 0.$$

Il est facile de voir que le coefficient de $\dfrac{\alpha^2}{\lambda + b^2} + \dfrac{\beta^2}{\lambda + a^2}$ est égal à $4(\lambda + a^2)(\lambda + b^2)$; de sorte que les dénominateurs disparaissent et l'équation se réduit finalement à

$$4\lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma) = (a^2 + b^2 - \gamma)^2 - 4(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + a^2b^2). \tag{17}$$

On en tire une valeur de λ, qui, portée dans (5), donnerait le troisième cône Q_3.

3° Si la biquadratique S se décompose en deux coniques, deux des cônes précédents doivent se confondre avec le faisceau des plans de ces coniques (n° 491, IV). L'un de ces cônes est Q_1 ou Q_2, soit, par exemple, Q_1. Pour $\lambda = -a^2$, les équations (6), (7), (8), (9) doivent se réduire à deux. Ceci est impossible si $\beta \neq 0$, car l'équation (11) ne saurait être vérifiée identiquement. Supposons donc $\beta = 0$. L'équation (7) est alors une identité. En tirant x de (6) et portant dans (8) et dans (9), on doit obtenir deux équations du premier degré en z identiques. Or, ces équa-

tions ne sont autres que les équations (16), où l'on ferait $\lambda = -a^2$ et $\beta = 0$. En écrivant qu'elles sont identiques, on aboutit donc à ce que devient l'équation (17) pour $\lambda = -a^2$ et $\beta = 0$, soit, après des calculs faciles,

$$(\gamma + c^2)^2 = 0. \qquad \gamma = -c^2.$$

L'équation (12) du cône Q_1 s'écrit, avec ces hypothèses,

$$c^2x^2 + (kz + a^2)^2 - 2\alpha x(kz + a^2) = 0. \tag{18}$$

Elle représente bien deux plans de la forme $kz + a^2 = \mu x$, c'est-à-dire deux plans passant par la droite D_1. Ces deux plans sont réels pour $\alpha^2 > c^2$.

Les conditions trouvées pour le cercle C peuvent s'interpréter en disant qu'il doit passer par les foyers imaginaires de l'ellipse E, section de Σ par xOy.

Le cône Q_2 a maintenant pour équation

$$c^2y^2 + (kz + b^2)(2\alpha x - kz - 2a^2 - b^2) = 0. \tag{19}$$

Il est tangent au plan $z = -\dfrac{b^2}{k}$ le long de la droite D_2. En outre, lorsque α varie, il passe constamment par la conique fixe

$$x = 0. \qquad c^2y^2 - (kz - a^2)^2 - c^2 = 0,$$

qui est une hyperbole du plan des yz, ayant son centre sur D_1.

Lorsque $\alpha = \pm c$, les deux coniques qui constituent S se confondent, leur plan commun ayant pour équation

$$kz + a^2 \pm cx = 0. \tag{20}$$

Mais, d'autre part, l'équation (2) se réduit à

$$(x \pm c)^2 + y^2 = 0.$$

Le cercle C dégénère suivant les isotropes issues d'un des foyers réels de E; la biquadratique S se compose donc de deux droites imaginaires doubles.

Si l'on partait des hypothèses $\lambda = -b^2$, $\alpha = 0$, on aboutirait à des conclusions analogues aux précédentes. Le cercle C passerait par les foyers réels de E, et S se décomposerait en deux coniques, dont les plans se couperaient suivant D_2.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Trouver les points d'intersection et les pôles doubles des couples de coniques :

$$x^2+xy-y^2-1=0, \qquad x^2+4y^2-x-6=0;$$

$$4x^2-4xy+y^2-2x-y=0. \qquad x^2+y^2-x+5y-1=0;$$

$$x^2+xy+y^2+x+y-\frac{1}{4}=0, \qquad x^2+7xy+4y^2-4x-8y+4=0;$$

$$x^2-y^2+2x-y+1=0, \qquad x^2+xy+y^2+3x+y+1=0;$$

$$x^2+xy+2y^2+3x+2=0. \qquad (x+y)^2+x+3y=0;$$

$$x^2+xy-2y^2+5x-7y-4=0. \qquad 2y^2-x+8y+7=0;$$

$$x^2-xy+y^2+y-2x=0, \qquad 3x^2-3xy+2x-y=0;$$

$$x^2-y^2+2y=0, \qquad (x+y)^2-3x=0;$$

$$x^2+2xy+3y^2-1=0. \qquad x^2+2xy+3y^2+x-y=0;$$

$$(y-2x)^2+x=0. \qquad (y-2x)^2+y+1=0.$$

2. On considère une ellipse E. Par ses foyers F et F', on fait passer un cercle variable C.

1° Discuter la réalité des points d'intersection des deux courbes.

2° On considère les tangentes à l'ellipse en ces points; lieu des sommets du quadrilatère formé par ces tangentes.

3° On considère le quadrilatère symétrique du précédent par rapport à FF'; lieu des points de rencontre des côtés des deux quadrilatères.

4° Lieu des points de contact avec C des tangentes communes aux deux courbes. (É. P., 1885; composition écrite.)

3. On considère deux paraboles de même sommet et d'axes perpendiculaires. L'une est fixe et l'autre variable. Quel est le lieu des points de contact de leurs tangentes communes avec la parabole variable?

(É. P., 1913.)

4. Soit une parabole P. On la fait tourner autour de son sommet et l'on obtient ainsi une parabole variable Q.

1° Les paraboles P et Q se coupent en deux points réels. Trouver le lieu du pôle double réel et l'enveloppe de la sécante qui joint les points imaginaires de l'intersection.

2° Lieu des ombilics réels et lieu du point de contact avec Q de la tangente commune réelle.

[Prendre pour paramètre l'angle φ dont a tourné la parabole.

L'équation en λ admet la seule racine réelle $\lambda = -1$. Il lui correspond deux sécantes rectangulaires, dont l'une est l'axe de symétrie de l'ensemble des deux paraboles.

Passer ensuite en tangentielles, en changeant x en u, y en v, z en w, p en $\frac{1}{p}$. On a encore la racine $\lambda = -1$, qui donne un ombilic à l'infini et un ombilic décrivant un cercle. La tangente commune réelle s'obtient en utilisant l'ombilic à l'infini; on calcule ensuite les coordonnées du point de contact en fonction de φ].

5. Étudier les biquadratiques suivantes. On cherchera, en particulier, les pôles doubles, les cônes, les décompositions, les contacts, et l'on vérifiera toutes les propriétés générales énoncées aux nos 488 à 492.

On pourra aussi construire les projections sur les plans de coordonnées et, pour les deuxième à cinquième cas, chercher les équations paramétriques rationnelles :

$$2x^2 + y^2 - z^2 = 0, \qquad 2xy - 2x - 1 = 0;$$

$$xy + yz - zx = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0;$$

$$x^2 - y^2 - 2z = 0, \qquad 5y^2 + z^2 + 4xy - 4zx + 2z = 0;$$

$$-x^2 + y^2 + zx + xy + y = 0, \qquad z(x + y) - y = 0;$$

$$x(x + y + z) - y = 0, \qquad x(x + 1) + y(z + 2) = 0;$$

$$x^2 + y^2 + 2yz - 6zx - 2x - 2z = 0, \qquad x^2 + y^2 - z^2 - 2yz - 2x = 0;$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2z = 0, \qquad x^2 + y(y + z - 2) + z(y + 2) = 0;$$

$$2xy - z(z + 2) = 0, \qquad (z + x)(z + y) - z = 0;$$

$$x^2 + y^2 - yz - 2x = 0, \qquad y(y - z) + x(x - z - 2) = 0;$$

$$yz + zx + xy - z = 0, \qquad yz + zx - xy - z = 0;$$

$$yz - zx + xy + x = 0, \qquad yz + x(z + 1) = 0;$$

$$x^2 + y^2 - 2yz - 2x + 2z = 0, \qquad (x - z)(x - z - 2) + (y - z)^2 = 0;$$

$$4x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 = 0, \qquad y(4x + y + 2z + 2) - 2(2x + 1)(z + 1) = 0;$$

$$x^2 + 4y^2 - z^2 - 1 = 0, \qquad z(x + 2y + z - 1) + (x - 1)(2y - 1) = 0.$$

5 *bis*. Lieu des points de contact des plans tangents à un ellipsoïde dont la distance au centre a une valeur donnée R; discuter la forme suivant la valeur de R. (Cette dernière courbe se rencontre en Mécanique, sous le nom de *polhodie*.)

6. Sur une quadrique Q, on prend une conique C et un point P extérieur à C. On projette C sur un plan II quelconque, à partir de P.

Démontrer que la projection passe par les traces sur H des deux génératrices de Q issues de P. Cas où P est un ombilic, le plan tangent en ce point étant parallèle à H.

(Considérer l'intersection de Q et du cône projetant.)

7. Démontrer que si deux quadriques se coupent suivant une conique C et deux droites rencontrant C au même point O, elles sont osculatrices en O.

(Couper par un plan quelconque passant par O.)

8. On donne un ellipsoïde E et un cône ayant pour base la section de E par le plan principal perpendiculaire au petit axe. Ce cône coupe E suivant une deuxième conique. Trouver le lieu du pôle du plan de cette conique par rapport à E. quand le sommet du cône décrit un plan fixe. (Extrait de la composition d'Agrégation de 1880.)

9. Démontrer qu'une cubique gauche est déterminée quand on en connaît sept points.

(La considérer comme intersection de deux cônes du second degré.)

10. Un cône a pour sommet un point $S(\alpha, \beta, \gamma)$ et pour base dans xOy le cercle de centre O et de rayon un. Déterminer ses plans cycliques.

(Couper par une sphère contenant le cercle de base.)

11. On considère la quadrique H définie par l'équation

$$2x^2 - \alpha^2 y^2 - \alpha^6 z^2 + 2\alpha^4 yz + 10\alpha^3 zx + 2\alpha xy - 12\alpha^2 x + 6\alpha^3 y + 6\alpha^5 z + 18\alpha^4 = 0,$$

où α désigne un paramètre variable.

1° L'enveloppe E de cette quadrique se compose de quatre surfaces réglées du quatrième degré.

2° Chaque quadrique H touche E suivant un quadrilatère gauche ABCD. Montrer que chaque côté de ce quadrilatère a un contact du second ordre avec les surfaces engendrées par les deux côtés qui lui sont adjacents.

3° La tangente au lieu de A et la caractéristique du plan DAB divisent harmoniquement l'angle BAD. On a les mêmes propriétés pour les trois autres sommets B, C, D.

4° Les lieux des sommets du tétraèdre ABCD, les arêtes de rebroussement des enveloppes de ses faces, les intersections des six surfaces réglées engendrées par ses arêtes se composent uniquement de cubiques gauches, qui admettent toutes une même définition géométrique très simple.

12. Deux triangles peuvent être conjugués à une même conique, inscrits dans une même conique, circonscrits à une même conique. Démontrer que s'ils jouissent d'une de ces propriétés, ils jouissent des deux autres.

(S'appuyer sur les théorèmes des nos 497 et 498.)

13. Démontrer que si un cercle est harmoniquement circonscrit à une conique, il est orthogonal à son cercle de Monge et réciproquement (*théorème de Faure*). Examiner, en particulier, le cas de la parabole.

14. Lieux des centres des hyperboles équilatères conjuguées à un triangle donné ou inscrites dans un triangle donné.

(Appliquer le théorème précédent.)

15. Lieu des centres des triangles équilatéraux conjugués, inscrits ou circonscrits à une conique donnée.

[Introduire les cercles circonscrit, inscrit, conjugué, qui doivent être concentriques. (*Cf.* Chap. XXXV. Exercice résolu n° 3.)]

16. Démontrer, en s'appuyant sur le théorème du n° 498, que le cercle circonscrit à tout triangle circonscrit à une parabole passe par le foyer de cette parabole.

(Introduire le triangle formé par la droite de l'infini et les tangentes isotropes.)

17. Toute hyperbole équilatère ayant son centre au foyer d'une parabole est harmoniquement circonscrite à cette parabole.

18. Soit une conique C harmoniquement circonscrite à une autre conique C'. Soient A un de leurs points communs et T une de leurs tangentes communes. Démontrer que :

1° Le pôle de la tangente en A à C par rapport à C' se trouve sur C.

2° La polaire par rapport à C du point de contact de T avec C' est tangente à C'.

Réciproques. — (Dégénérescences de triangles.)

19. Soient deux coniques C et C' et A un de leurs points d'intersection. La tangente en A à C' coupe C en A'. Montrer que si la tangente en A' à C est tangente à C', on a la même propriété en partant des trois autres points d'intersection. (Triangles de Poncelet dégénérés.)

20. Si deux paraboles ont même sommet et sont orthogonales en ce point, il existe des triangles inscrits dans chacune d'elles et circonscrits à l'autre.

CHAPITRE XXXIII.

DÉTERMINATION DES CONIQUES ET QUADRIQUES; ÉQUATIONS GÉNÉRALES; FAISCEAUX ET RÉSEAUX.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *On donne un cercle* C, *un point* A *et un point* O. *Existe-t-il une quadrique* Q *contenant* C *et* A *et admettant le point* O *pour centre? Construire le plan tangent en* A, *le cône asymptote et les axes.*

(E. P., 1913.)

Le cercle C équivaut à cinq conditions ponctuelles, le point A à une et le point O à trois, ce qui fait en tout neuf conditions ponctuelles indépendantes. Donc la quadrique Q existe et est unique.

Pour construire le plan tangent en A, cherchons les génératrices issues de ce point (n° 447). Elles s'appuient sur le cercle C et aussi sur le cercle C′, symétrique de C par rapport à O, qui se trouve évidemment sur la quadrique. On les obtient en prenant les deux ([1]) génératrices G et G′ d'intersection des cônes (A, C) et (A, C′). Chacune de ces deux droites appartient nécessairement à Q, car elle y a trois points, à savoir le point A, son point de rencontre avec C et son point de rencontre avec C′. Le plan GAG′ est le *plan tangent cherché*.

Le cône asymptote a pour base, dans le plan P de C, un cercle γ concentrique à C. De plus, il contient les droites g et g', menées par O parallèlement à G et G′. En prenant la trace de g, par exemple, sur le plan P, on a un point du cercle γ, qui est dès lors déterminé.

Les axes de Q sont aussi les axes du cône asymptote. On est ramené à l'Exercice proposé n° 7 du Chapitre XXXI.

2. *Former l'équation générale des paraboles* II *tangentes à* Ox *et à* Oy.

([1]) Il n'y a que deux génératrices d'intersection, parce que les cônes ont des bases circulaires dans des plans parallèles. Les deux autres génératrices communes sont isotropes, mais ne conviennent pas comme génératrices de Q, parce qu'elles rencontrent chacune C et C′ au même point et n'ont, par suite, que deux points communs avec Q.

Soit

$$Y^2 - 2pX = 0 \tag{1}$$

l'équation de la parabole (H) rapportée à son axe ωX et à sa tangente au sommet ωY. Soient (a, b) les coordonnées de ω par rapport à Oxy et soit $\varphi = \left(\widehat{Ox, \omega X}\right)$. Les formules qui permettent de passer des axes Oxy aux axes ωXY et inversement sont

$$x = a + X\cos\varphi - Y\sin\varphi, \qquad y = b + X\sin\varphi + Y\cos\varphi; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} X &= (x-a)\cos\varphi + (y-b)\sin\varphi, \\ Y &= -(x-a)\sin\varphi + (y-b)\cos\varphi. \end{aligned} \tag{3}$$

En particulier, en annulant x et y dans les formules (2), on obtient les équations de Oy et Ox par rapport aux axes ωXY :

$$X\cos\varphi - Y\sin\varphi + a = 0, \qquad X\sin\varphi + Y\cos\varphi + b = 0.$$

En portant les coefficients de ces équations dans l'équation tangentielle de la parabole (1) (n° 512), on obtient immédiatement

$$a = \frac{p\sin^2\varphi}{2\cos\varphi}, \qquad b = \frac{p\cos^2\varphi}{2\sin\varphi}. \tag{4}$$

Portant dans (3), on a

$$X = x\cos\varphi + y\sin\varphi - \frac{p}{2}, \qquad Y = -x\sin\varphi + y\cos\varphi - p\cot 2\varphi.$$

Portant enfin dans (1), on a l'équation générale demandée :

$$(x\sin\varphi - y\cos\varphi + p\cot 2\varphi)^2 - 2p\left(x\cos\varphi + y\sin\varphi - \frac{p}{2}\right) = 0. \tag{5}$$

Remarques. — I. Les équations (4) sont les équations paramétriques du *lieu du sommet*.

II. L'équation (5) doit pouvoir se mettre sous la forme (n° 507)

$$(ux + vy + w)^2 + \lambda xy = 0.$$

Effectivement, si on la développe et qu'on l'ordonne, on aperçoit aisément qu'elle peut s'écrire

$$\left(x\sin\varphi + y\cos\varphi - \frac{p}{\sin 2\varphi}\right)^2 + 2xy\sin 2\varphi = 0. \tag{6}$$

L'équation de la corde de contact est, comme on sait,

$$(7) \qquad x\sin\varphi - y\cos\varphi - \frac{p}{\sin 2\varphi} = 0.$$

3. *Démontrer que les rayons de courbure de deux coniques bitangentes en leurs points de contact sont proportionnels.* (E. P., 1906.)

Prenons pour origine le milieu des points de contact A et A′ et pour axe des x la droite joignant ces points. Soit $\overline{A'A} = 2a$. Les coniques proposées ont des équations de la forme (n° 307)

$$(1) \qquad x^2 + 2Bxy - \lambda y^2 + 2Ey - a^2 = 0,$$

où λ doit recevoir deux valeurs numériques quelconques.

Soient β et β' les ordonnées des centres des cercles osculateurs en A et A′ à la conique (1). Le rapport $\frac{\beta}{\beta'}$ est égal au rapport des rayons de courbure, multiplié par un facteur indépendant de λ, puisque les normales en A et A′ sont indépendantes de ce paramètre. Pour établir la propriété de l'énoncé, il nous suffit donc de montrer que ce rapport $\frac{\beta}{\beta'}$ est, lui aussi, indépendant de λ.

Calculons β. A cet effet, nous allons chercher l'équation du cercle osculateur en A à la conique (1). Cette équation est de la forme (n° 307)

$$(2) \qquad \begin{aligned} &x^2 + 2Bxy + \lambda y^2 + 2Ey - a^2 \\ &\quad + \mu[xa + y(Ba + E) - a^2][y - m(x - a)] = 0, \end{aligned}$$

μ et m devant être choisis de manière qu'elle représente un cercle. Annulons le coefficient de xy et la différence des coefficients de x^2 et de y^2 :

$$(3) \qquad 2B + \mu[a - m(Ba + E)] = 0.$$

$$(4) \qquad 1 - \lambda + \mu[-am - Ba - E] = 0.$$

Ces deux équations déterminent μ et m. Nous avons ensuite

$$(5) \qquad 2\beta = \frac{-2E - \mu[ma(Ba + E) - a^2]}{1 - \mu am} = \frac{-2E - 2aB}{1 - \mu am},$$

en tenant compte de (3). Il nous suffit maintenant de calculer μm, d'après (3) et (4). Pour cela, nous multiplions (3) par $Ba + E$, (4) par a

et nous ajoutons

$$2B(Bu+E)+u(1-\lambda)=\mu m[(Bu+E)^2+u^2];$$

d'où l'on tire μm, puis

$$1-\mu m m=\frac{(Bu+E)^2+u^2-2uB(Bu+E)-u^2(1-\lambda)}{(Bu+E)^2+u^2}$$
$$=\frac{\lambda u^2+E^2-B^2u^2}{(Bu+E)^2+u^2}.$$

Portant dans (5), on a enfin

$$\beta=-\frac{(E-Bu)[u^2+(Bu+E)^2]}{\lambda u^2+E^2-B^2u^2}.$$

En changeant u en $-u$, on a β'. On voit que le numérateur seul change. Comme il ne renferme pas λ, il en résulte bien que le rapport $\frac{\beta}{\beta'}$ est indépendant de λ. C. Q. F. D.

1. *Soit une ellipse* E *ayant pour équation tangentielle*

$$\varphi(u,v)=w^2, \tag{1}$$

φ *désignant une forme quadratique en* u, v. *Soit, d'autre part, le point* $P(\alpha,\beta)$. *Soient* AB *le diamètre conjugué de* OP *et* Q *le point où* OP *rencontre* E. *On prend, sur* OP, *le point* P′ *tel que*

$$\overline{OP'}^2=\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2$$

et l'on considère l'ellipse E′ *bitangente à* E *en* A *et* B *et passant par* P′. *Montrer que cette ellipse a pour équation tangentielle* [1]

$$\varphi'(u,v)\equiv\varphi(u,v)+(\alpha u+\beta v)^2=w^2. \tag{2}$$

L'ellipse (2) est bitangente à (1), le pôle de contact ayant pour équation tangentielle (n° 508)

$$\alpha u+\beta v=0. \tag{3}$$

Ce pôle est le point à l'infini sur OP; donc, la corde de contact est le

---

[1] Cette proposition se présente dans certaines questions de Calcul des probabilités. Cf. *Nouvelles Annales de Mathématiques* (avril, mai, juin 1920).

diamètre conjugué AB de OP. Soient maintenant

$$\lambda = \frac{OQ}{OP} \qquad \text{et} \qquad \lambda' = \frac{OP'}{OP}.$$

On a

$$\lambda'^2 = \lambda^2 + 1. \tag{4}$$

Les coordonnées du point Q sont $\lambda\alpha$, $\lambda\beta$. Les tangentes issues de ce point à E sont confondues; donc, l'équation en u, v

$$\varphi(u, v) - \lambda^2(\alpha u + \beta v)^2 = 0 \tag{5}$$

doit admettre une racine double. Il faut montrer qu'il en est alors de même de l'équation

$$\varphi(u, v) + (\alpha u + \beta v)^2 - \lambda'^2(\alpha u + \beta v)^2 = 0. \tag{6}$$

Or, si l'on tient compte de (4), les équations (6) et (5) sont identiques; elles admettent donc en même temps une racine double et E′ passe bien par P′. C. Q. F. D.

5. *On donne une sphère* S *et, sur cette sphère, un grand cercle* C *et un point* A. *Trouver l'équation générale des quadriques* Q *passant par* C *et tangentes en* A *à* S. *Montrer que, parmi ces quadriques, il y a deux paraboloïdes.*

Chaque quadrique Q coupe S suivant C et suivant une seconde conique C′ admettant A pour point double et constituée, par conséquent, par les deux isotropes menées par A dans le plan tangent à S en ce point. Il s'ensuit que les quadriques Q forment un faisceau ponctuel défini par S, d'une part, et les plans de C et de C′, d'autre part.

Prenons pour origine et pour plan des xy le centre et le plan de C. Soient R le rayon de la sphère et (α, β, γ) les coordonnées de A.

L'équation demandée s'écrit immédiatement

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - 2\lambda z(\alpha x + \beta y + \gamma z - R^2) = 0. \tag{1}$$

Cette quadrique est un paraboloïde si le discriminant des termes du second degré est nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda\alpha \\ 0 & 1 & \lambda\beta \\ \lambda\alpha & \lambda\beta & 1 + 2\lambda\gamma \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\lambda^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2\lambda\gamma - 1 = 0. \tag{2}$$

Cette équation du second degré donne deux valeurs de λ, auxquelles correspondent deux paraboloïdes.

Si l'on tient compte de $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2=R^2$, l'équation (2) s'écrit

$$\lambda^2 R^2=(\lambda\gamma+1)^2;$$

d'où

$$\lambda=-\frac{1}{\gamma\pm R}.$$

Portant dans (1), on a les équations des deux paraboloïdes :

$$(3)\quad (\gamma\pm R)(x^2+y^2+z^2-R^2)-2z(\alpha x-\beta y+\gamma z-R^2)=0.$$

Remarque. — En général, un faisceau ponctuel de quadriques comprend trois paraboloïdes (n° 505). Dans le cas actuel, il n'y en a que deux, le troisième étant dégénéré suivant les plans de C et de C'.

6. *Soit la surface* T

$$(1)\qquad (x^2+y^2)(x+a)+z^2(x-a)=0.$$

Montrer qu'il y a une infinité de sphères S *ayant leurs centres dans* xOy *et orthogonales à* T *tout le long de l'intersection.* (É. N., 1898; extrait de la composition écrite.)

Soit

$$(2)\qquad x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y+\delta=0$$

l'équation d'une des sphères S. Si l'on tient compte de cette équation, l'équation (1) s'abaisse visiblement au second degré et s'écrit

$$(3)\qquad x(2\alpha x+2\beta y-\delta)+a(x^2+y^2-z^2)=0.$$

L'intersection (à distance finie) des deux surfaces est donc une biquadratique Γ. Écrivons qu'au point (x, y, z) de cette courbe, les plans tangents à S et T sont perpendiculaires :

$$(x-\alpha)(3x^2+y^2+2ax-z^2)+(y-\beta)[2y(x+a)]+z[2z(x-a)]=0$$

ou

$$3x(x^2+y^2+z^2)+(2a-3\alpha)x^2+(2a-\alpha)y^2-(2a+\alpha)z^2-2\beta xy-2a\alpha x-2a\beta y=0.$$

En tenant compte de (2), cette équation s'abaisse encore au second

degré et devient

$$(4)\qquad (2a+3\alpha)x^2+(2a-\alpha)y^2-(2a+\alpha)z^2 + 4\beta xy-2a\alpha x-2a\beta y=0.$$

Elle doit être vérifiée pour tous les points de Γ. Autrement dit, elle doit représenter une quadrique appartenant au faisceau

$$(5)\qquad (3)+\lambda(2)=0.$$

Identifions donc (4) et (5) :

$$(6)\qquad a+2\alpha+\lambda=\rho(2a+3\alpha),$$

$$(7)\qquad a+\lambda=\rho(2a-\alpha),$$

$$(8)\qquad -a+\lambda=-\rho(2a+\alpha),$$

$$(9)\qquad \beta=2\rho\beta,$$

$$(10)\qquad -\delta-2\lambda\alpha=-2\rho a\alpha,$$

$$(11)\qquad -2\lambda\beta=-2\rho a\beta,$$

$$(12)\qquad \lambda\delta=0.$$

Il faut qu'on puisse déterminer λ et ρ satisfaisant à toutes ces équations.

Prenons d'abord la dernière. Si l'on suppose $\delta\neq 0$, on en tire $\lambda=0$. En portant dans les autres équations, on constate facilement qu'elles sont incompatibles, quels que soient α, β. Prenons donc $\delta=0$.

Si $\beta\neq 0$, l'équation (11) nous donne $\lambda=\rho a$ et l'équation (9) nous donne $2\rho=1$. En portant dans les autres, on aboutit à la condition unique $\alpha=-a$.

L'hypothèse $\beta=0$ nous conduirait au même résultat.

En définitive, *les sphères* S *ont pour équation générale*

$$(13)\qquad x^2+y^2+z^2+2ax-2\beta y=0.$$

Elles constituent un faisceau, dont le cercle de base est le cercle

$$x^2+z^2+2ax=0$$

du plan des zx.

7. *Quels sont les lieux des droites conjuguées d'une droite fixe et des pôles d'un plan fixe par rapport à un faisceau ponctuel de quadriques?*

Soit une droite fixe D. Prenons-y trois points fixes quelconques A_1, A_2, A_3. Soient α_1, α_2, α_3 leurs plans polaires par rapport à une qua-

drique S du faisceau. Ces trois plans passent par la droite δ conjuguée de D par rapport à S. Lorsque S varie, α_1, α_2, α_3 passent respectivement par trois droites fixes G_1, G_2, G_3 (n° 505). La droite δ s'appuie constamment sur ces trois droites. Donc, *elle décrit une quadrique* Q, contenant G_1, G_2, G_3.

Cette quadrique, d'après la démonstration même, peut être *considérée aussi comme le lieu de la droite* G, enveloppe des plans polaires d'un point A, quand ce point décrit D. Les droites δ constituent un système de génératrices de Q et les droites G constituent l'autre système.

Si l'on prend pour S un cône du faisceau, δ passe par le sommet de ce cône. Donc, *la quadrique* Q *contient les quatre pôles doubles.*

Soient maintenant un plan fixe P et deux droites fixes quelconques D_1 et D_2 prises dans ce plan. Le pôle M de P par rapport à S se trouve sur les droites δ_1 et δ_2 conjuguées de D_1 et D_2. Le lieu de ce point est donc à la fois sur les quadriques Q_1 et Q_2, lieux de δ_1 et δ_2. Or, ces quadriques ont en commun la droite G correspondant au point A où se coupent D_1 et D_2. Le reste de leur intersection est donc *une cubique gauche* Γ, qui constitue le lieu du point M.

Remarquons que cette cubique se trouve sur toutes les quadriques Q correspondant aux différentes droites du plan P. Ses cordes sont les droites G associées aux différents points de P. Enfin, *elle passe par les pôles doubles du faisceau.*

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Une conique étant déterminée par cinq points 1, 2, 3, 4, 5 :

1° Construire son deuxième point de rencontre avec une droite quelconque D passant par le point 1;

2° Construire ses points de rencontre avec une droite quelconque Δ;

3° Construire son centre;

4° Construire deux diamètres conjugués.

[Pour 1° et 2°, appliquer le théorème de Desargues (*voir* aussi Chap. XXXVII, Exercice proposé n° 16). Pour 3°, construire la corde 16 parallèle à 22; on en déduit un diamètre, etc. Pour 4°, appliquer 3° et 2°.]

2. Problème corrélatif du précédent.

(Le centre peut être obtenu par l'intersection de deux droites de Newton. On peut aussi construire la tangente parallèle à l'une des tangentes données.)

3. Construire une conique, connaissant quatre points et une tangente ou quatre tangentes et un point (théorème de Desargues).

4. Construire une conique, connaissant trois points A, B, C et deux tangentes T et T'.

(Chercher les points de contact M et M' avec ces tangentes, en considérant le faisceau des coniques tangentes à T et T' en M et M' et appliquant le théorème de Desargues aux droites AB et AC. La corde MM' doit passer par les points doubles.)

5. Problème corrélatif du précédent.

6. Construire une conique connaissant :

1° Trois points ou trois tangentes et le centre;
2° Trois tangentes et un foyer;
3° Trois points et un foyer;
4° Quatre points et un couple de points conjugués;
5° Trois points ou trois tangentes et la polaire d'un point;
6° Deux points ou deux tangentes et un triangle conjugué;
7° Un point ou une tangente et les polaires de deux points;
8° Un triangle conjugué et la polaire d'un point;
9° Un triangle conjugué et le centre, ou un axe, ou un foyer.

Dans toutes ces questions, on envisagera le cas particulier où l'une des tangentes données est la droite de l'infini (parabole). [*Cf.* N$_{m}$, n^{os} 253 à 257.]

7. Construire une parabole connaissant la direction de l'axe, un point et le cercle osculateur en ce point. (É. P., 1913.)

8. Une quadrique est-elle déterminée quand on en connaît une conique C, deux points A et B et le plan tangent en A? Construire les génératrices issues des points A et B, puis les génératrices issues d'un point quelconque de C.

9. Dans une quadrique, on donne le centre, une conique et un plan tangent: combien y a-t-il de solutions? (É. P., 1913.)

10. Dans un paraboloïde, on donne la direction de l'axe, un plan tangent et le point de contact A et une génératrice. Est-il déterminé? Construire ses plans directeurs, ainsi que les génératrices issues de A. (É. P., 1913.)

11. Dans un cylindre parabolique, on donne un plan diamétral et la direction des génératrices. Combien faut-il encore de points pour le déterminer? Construire sa base en se donnant ces points. (É. P., 1913.)

12. Soient deux axes rectangulaires Oxy, un point A sur Ox et un point B sur Oy. Former l'équation générale des coniques passant par O, A, B et telles que les tangentes en A et B se coupent sur la perpendiculaire abaissée de O sur AB.

13. Former l'équation générale des ellipses de grandeur constante tangentes aux axes de coordonnées. Trouver les lieux de leurs centres et de leurs foyers. (*Cf.* Exercice résolu n° 2.)

14. Équation générale des paraboles tangentes à Ox et Oy et telles que la corde de contact passe par un point fixe.

15. Trouver l'enveloppe des paraboles passant par deux points fixes A et B et tangentes à une droite fixe parallèle à AB. Lieu du pôle de AB. (É. P., 1913.)

16. 1° Former les équations ponctuelle et tangentielle de la parabole H la plus générale bitangente à une ellipse donnée E;

2° Enveloppe de la corde de contact D quand H passe par un point fixe P. Cette enveloppe est une ellipse E′ homothétique à E. Chercher la corde commune de E et de E′. Lieu de P pour que E′ garde une grandeur constante.

17. Former l'équation générale des cercles tangents à une ellipse. Lieu des centres de ces cercles quand la sécante commune enveloppe une ellipse homothétique et concentrique à la proposée.

18. On considère les coniques inscrites dans un losange fixe admettant Ox et Oy pour diagonales. Par un point $M(x, y)$ passent deux de ces coniques. Former l'équation aux coefficients angulaires des tangentes en M à ces coniques. Quel lieu doit décrire le point M pour que ces tangentes fassent un angle constant? Montrer que ce lieu se compose d'hyperboles. (Bourses de licence, 1890.)

19. Former l'équation générale des paraboles surosculatrices à une conique donnée.

20. Équation générale et lieu des centres des hyperboles équilatères surosculatrices à une ellipse donnée. (É. P., 1913.)

21. Équation générale et lieu des foyers des paraboles qui ont un sommet donné et passent par un point donné. (É. P., 1913.)

22. Soit un cercle de centre O. On considère la parabole osculatrice à ce cercle au point variable M et ayant son axe parallèle à Ox. Trouver l'enveloppe de la droite joignant M au deuxième point de rencontre du cercle et de la parabole. (É. P., 1913.)

[On connaît la direction de cette droite (n° 506).]

23. Trouver toutes les coniques C qui coupent orthogonalement une ellipse donnée E aux quatre points de l'intersection. (É. P., 1906.)

[En exprimant l'orthogonalité, on obtient une équation du second degré en x, y, qui doit représenter une conique du faisceau (C, E). En faisant l'identification, on aboutit à quatre familles de coniques, suivant qu'on suppose qu'il y a, dans l'équation de C, un terme en y, un terme en x, un terme en xy ou aucun de ces termes. Les trois premières familles sont des faisceaux ponctuels; la quatrième est le faisceau des coniques homofocales à E (n° 516).]

24. Même question, en remplaçant l'ellipse par une parabole.

(On trouve les ellipses $2x^2 + y^2 = \text{const.}$, un faisceau ponctuel de paraboles et les paraboles homofocales à la proposée.)

25. Former l'équation générale des coniques S tangentes en O à Ox et admettant en ce point un rayon de courbure donné R. Former également les équations des deux axes de S.

(Introduire l'angle polaire φ de la sécante commune. Les angles polaires des axes sont alors $\frac{\varphi}{2}$ et $\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}$.)

26. Lieux des centres et des sommets des hyperboles équilatères qui ont une directrice donnée et passent par un point donné. (E. N., 1905.)

27. Enveloppe de la sécante commune à une ellipse et au cercle osculateur en chacun de ses points. (É. P., 1906.)

28. Que deviennent les théorèmes II et III du n° 505, quand la droite D passe par un point de base?

29. Que devient le théorème X du n° 305, quand les coniques du faisceau sont bitangentes ?

(Prendre l'équation tangentielle $\lambda u^2 + 2cvw = 0$.)

30. Trouver le lieu de l'ombilic du cercle et de la parabole de l'Exercice n° 22 (coordonnées tangentielles).

31. Lieu des sommets des paraboles inscrites dans un triangle rectangle (coordonnées tangentielles).

32. Soient une ellipse E et un point M de son plan. On considère le cercle C passant par M et les points de contact P et Q des tangentes à E issues de M. Ce cercle rencontre de nouveau E en P′, Q′. Prouver que les tangentes en P′, Q′ à E se coupent en M′ sur C et que, par M et M′, on peut faire passer un cercle contenant les deux foyers (réels ou imaginaires) de E. (É. N., 1891; composition écrite.)

(OM et OM′ sont, *a priori*, également inclinées sur les axes. Prendre deux points M et M′ dans cette condition et considérer le faisceau déterminé par E et les polaires de ces points.)

33. Montrer que l'équation ponctuelle générale des coniques inscrites dans le triangle de référence peut s'écrire

$$A\sqrt{x} + B\sqrt{y} + C\sqrt{z} = 0.$$

Application aux cônes de sommet O et tangents aux plans de coordonnées. Problèmes corrélatifs.

34. On décrit un cercle C, de centre O et de rayon R, dans le plan des xy. On prend un point A sur Ox et l'on mène une sécante quelconque AMN. Sur MN comme diamètre, on décrit un cercle C′, dans un plan perpendiculaire à xOy. Trouver l'équation générale des quadriques passant par C et C′.

35. Soit un tétraèdre OABC trirectangle en O. On circonscrit un cercle Γ à OAB et deux hyperboles équilatères H et H′ à OAC et OBC. Montrer qu'il existe une quadrique Σ passant par ces trois courbes.

36. Former l'équation générale des paraboloïdes P admettant xOy pour plan de symétrie, tangents à yOz en O et ayant pour trace sur zOx une ellipse de grandeur invariable dont le grand axe est sur Ox. (Agrégation, 1901, extrait.)

37. Sur Ox, on prend $OA = OA' = a$; sur Oy, $OB = OB' = b$; sur Oz, $OC = OC' = c$. Former l'équation générale des quadriques passant par les six points A, A', B, B', C, C'.

38. Soient un ellipsoïde E, deux points P et P' et les sections C et C' de E par les plans polaires de P et P'.

Montrer qu'il y a une quadrique Σ, en général unique, qui passe par C, C', P, P'. Dans quel cas y en a-t-il une infinité et quel est alors le lieu de leurs centres?

Parmi l'ensemble des quadriques Σ, il y a des sphères. Trouver leur enveloppe. (Agrégation, 1888, extrait.)

39. On reprend la surface Σ de l'Exercice résolu n° 4 du Chapitre XXXII.

Montrer que ses lignes de plus grande pente, quand on suppose Oz vertical, sont des biquadratiques unicursales, situées sur des paraboloïdes de révolution d'axe Oz.

40. Démontrer que si deux quadriques se raccordent suivant Oz, les pôles d'un même plan P par rapport à ces deux quadriques sont sur une droite rencontrant Oz.

41. Quels sont le lieu des droites conjuguées d'une droite fixe et l'enveloppe des plans polaires d'un point fixe par rapport aux quadriques d'un faisceau tangentiel? (*Cf.* Exercice résolu n° 7.)

42. On donne les points A sur Ox, B sur Oy, C sur Oz.

Équation générale et lieu des centres des quadriques contenant le quadrilatère gauche OACBO. (É. P., 1913.)

43. Trouver les quadriques contenant la courbe

$$x = \cos\theta, \qquad y = 1 + \sin\theta, \qquad z = \operatorname{tang}\theta.$$

(É. P., 1913.)

44. Équation générale des quadriques passant par Ox et Oy et admettant comme plans asymptotes zOx et zOy. (É. P., 1913.)

45. Étendre à l'espace l'Exercice résolu n° 4.

46. Examiner ce que deviennent les propriétés des n^{os} 510 à 513 quand les coniques du réseau (R) ont un, deux ou trois points communs et, corrélativement, quand les coniques du réseau (ρ) ont une, deux ou trois tangentes communes.

[Si le réseau (R) admet un point de base A, la cayleyenne (Γ) se décompose en ce point et une conique. De plus, A est un point double de (H). Si l'on a deux points de base A et B, (Γ) se décompose en ces deux points et un troisième. De plus, (H) se décompose en la droite AB et une conique passant par A et B.]

47. On considère une famille d'hyperboles équilatères H, homothétiques et concentriques.

1° Lieu des points de contact des tangentes issues d'un point fixe P;

2° Enveloppe des tangentes aux points de rencontre avec une droite fixe D;

3° Lieu des ombilics relatifs à H et à une conique fixe S;

4° Enveloppe des cordes communes à H et à une conique fixe Σ. Cas où Σ se compose de deux droites rectangulaires;

5° Lieu des sommets et enveloppe des côtés du triangle conjugué commun à H et Σ.

[Considérer le réseau tangentiel (H, S) et le réseau ponctuel (H, Σ). Les propriétés 1° et 2° sont des cas particuliers de 3° et 4°.]

48. On considère toutes les hyperboles équilatères H, qui déterminent sur Oy un segment variable de milieu O et qui divisent harmoniquement un segment AB de Ox, défini par $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$.

1° Montrer qu'il existe une infinité de segments MM′ divisés harmoniquement par toutes les hyperboles H; les points M et M′ sont chacun le centre d'une hyperbole H réduite à deux droites;

2° M et M′ sont les foyers d'une conique tangente en O à Ox et, en des points variables, aux parallèles à Oy menées par A et B;

3° Lieu du milieu de MM′ et lieu S de M et de M′;

4° Montrer que S peut être définie comme enveloppe de quatre familles de cercles, qui lui sont bitangents. Lieu des centres de ces cercles. Prouver que S est triplement anallagmatique;

5° En M et M′, on mène les tangentes à S; lieu de leur point de rencontre. (Agrégation, 1894.)

(Les hyperboles H forment un réseau ponctuel. Le réseau contravariant admet pour coniques de base les points cycliques, les points A et B, le point O et le point à l'infini sur Oy.)

49. La hessienne d'un réseau de cercles est le cercle orthotomique (n° 174).

CHAPITRE XXXIV.

FOYERS.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Trouver les foyers et directrices de la conique*

$$2xy + 4x - 1 = 0. \qquad \text{(É. P., 1906.)} \tag{1}$$

Soit $F(\alpha, \beta)$ l'un de ces foyers. La droite isotrope

$$y - \beta = i(x - \alpha) \tag{2}$$

doit être tangente à (1). Formons l'équation aux x des points d'intersection :

$$2ix^2 + 2x(\beta - i\alpha + 2) - 1 = 0. \tag{3}$$

Elle doit avoir une racine double :

$$(\beta - i\alpha + 2)^2 + 2i = 0. \tag{4}$$

Cette équation doit être vérifiée également quand on change i en $-i$. Nous devons donc annuler séparément le terme indépendant et le coefficient de i :

$$(\beta + 2)^2 - \alpha^2 = 0, \tag{5}$$

$$-\alpha(\beta + 2) + 1 = 0. \tag{6}$$

Les quatre foyers sont donnés par l'intersection des deux hyperboles équilatères [1] (5) et (6). La première se décompose d'ailleurs en deux droites rectangulaires, qui sont, par suite, *les axes de la conique proposée :*

$$\beta + 2 = \pm\alpha. \tag{7}$$

---

[1] Ceci se produit dans le cas général. Les deux hyperboles sont quelquefois appelées *hyperboles focales*.

En portant dans (6), il vient

$$x^2 = \pm 1. \tag{8}$$

En définitive, les foyers réels sont obtenus en prenant le signe — et ont pour coordonnées respectives $(1, -1)$ et $(-1, -3)$.

Le signe + donnerait les foyers imaginaires; la droite (7) correspondante est l'axe non transverse de l'hyperbole proposée.

Les directrices correspondant aux deux foyers réels sont les polaires de ces points: elles ont pour équations respectives

$$x - y - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad x - y - 3 = 0.$$

2. *Étant donnés un cercle* C *et une droite* D, *le lieu des centres des cercles* γ *tangents à* D *et orthogonaux à* C *est une parabole* H. *Trouver le lieu du foyer et l'enveloppe de la directrice de* H, *quand* D *passe par un point fixe* P. *L'enveloppe est une parabole* H', *de foyer* P; *trouver le lieu de* P *quand la directrice de* H' *passe par un point fixe* Q.

Prenons pour axes deux diamètres rectangulaires de C et soient u, v, w les coordonnées homogènes de D.

Soient (x, y) les coordonnées du centre de γ. Si R désigne le rayon de C, le rayon R' de γ est $\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$. Écrivant que γ est tangent à D, nous avons l'équation de H :

$$(ux + vy + w)^2 = (x^2 + y^2 - R^2)(u^2 + v^2). \tag{1}$$

Sous cette forme, on reconnaît que le cercle C est un cercle focal de H, la corde de contact étant D et l'excentricité 1 (n° 538). Le foyer F se trouve sur la perpendiculaire abaissée de O sur D; ses coordonnées sont donc de la forme ρu, ρv. La directrice Δ est parallèle à D; soient u, v, w' ses coordonnées. L'équation (1) doit pouvoir s'écrire

$$(ux + vy + w')^2 = [(x - \rho u)^2 + (y - \rho v)^2](u^2 + v^2). \tag{2}$$

En identifiant, on trouve les conditions

$$w = w' + \rho(u^2 + v^2). \tag{3}$$

$$w^2 + R^2(u^2 + v^2) = w'^2 - \rho^2(u^2 + v^2)^2. \tag{4}$$

La seconde équation s'écrit, en tenant compte de la première,

$$w + \frac{R^2(u^2 + v^2)}{w} = w' - \rho(u^2 + v^2). \tag{5}$$

Par addition et soustraction de (3) et (5), on a

$$u' = u + \frac{R^2(u^2+v^2)}{2w}, \qquad v' = v - \frac{R^2}{2w}. \tag{6}$$

Les coordonnées du foyer F sont donc

$$x = -\frac{R^2 u}{2w}, \qquad y = -\frac{R^2 v}{2w} \tag{7}$$

et celles de la directrice Δ sont

$$u' = u, \qquad v' = v, \qquad w' = w + \frac{R^2(u^2+v^2)}{2w}. \tag{8}$$

Si D passe par le point fixe $P(\alpha, \beta)$, on a

$$u\alpha + v\beta + w = 0. \tag{9}$$

Éliminons u, v, w entre (7) et (9), nous avons *l'équation du lieu de* F :

$$\alpha x + \beta y - \frac{R^2}{2} = 0. \tag{10}$$

Ce lieu est une droite homothétique de la polaire de P par rapport à C, dans le rapport $\frac{1}{2}$, le centre d'homothétie étant O.

Éliminons maintenant u, v, w entre (8) et (9) : nous obtenons *l'équation tangentielle de* H' :

$$w' = -(u'\alpha + v'\beta) - \frac{R^2(u'^2+v'^2)}{2(u'\alpha+v'\beta)}$$

ou, en chassant le dénominateur et supprimant les accents :

$$2(u\alpha - v\beta)(u\alpha + v\beta + w) + R^2(u^2+v^2) = 0. \tag{11}$$

Sous cette forme, on aperçoit les deux foyers représentés par les équations tangentielles (n° 516)

$$u\alpha + v\beta = 0, \qquad u\alpha + v\beta + w = 0. \tag{12}$$

Le premier est le point à l'infini sur OP; le second est le point P. Donc, H' *est une parabole de foyer* P *et d'axe* PO. Sa directrice, qui est perpendiculaire à OP, a des coordonnées de la forme

$$\alpha, \quad \beta, \quad \lambda. \tag{13}$$

Le pôle de cette droite a pour équation tangentielle (n° 443)

$$(u\alpha + v\beta)(\alpha^2 - \beta^2 - \lambda) + (\alpha^2 + \beta^2)(u\alpha + v\beta + w) + R^2(u\alpha + v\beta) = 0.$$

Cette équation doit être identique à l'équation tangentielle du foyer P, soit

$$u\alpha - v\beta + w = 0.$$

L'identification est immédiate et donne

$$\alpha^2 + \beta^2 + \lambda - R^2 = 0,$$

d'où λ. *La directrice de* H' *a finalement pour équation*

$$\alpha x + \beta y - (\alpha^2 - \beta^2 + R^2) = 0. \tag{14}$$

Si l'on regarde x, y comme les coordonnées fixes de Q et α, β comme les coordonnées courantes, cette équation représente le dernier lieu demandé, qui est donc un cercle orthogonal à C et ayant pour centre le milieu de OQ.

3. *Lieu des points de contact des tangentes et des pieds des normales menées à des coniques homofocales parallèlement à une direction fixe* Δ.

Remarquons d'abord, en vertu d'un théorème du n° 516, que tout pied de normale parallèle à Δ est un point de contact de tangente perpendiculaire à Δ. Le second lieu se ramène donc au premier, en remplaçant Δ par la direction perpendiculaire Δ'.

Soit maintenant l'équation tangentielle du faisceau (n° 516)

$$c^2u^2 - w^2 + \lambda(u^2 - v^2) = 0. \tag{1}$$

Le point de contact de la tangente (u, v, w) a pour coordonnées

$$x = \frac{(c^2 + \lambda)u}{-w}, \qquad y = \frac{\lambda v}{-w}. \tag{2}$$

Nous aurons l'équation du lieu, quand w et λ varient, en éliminant ces quantités entre (1) et (2). Le calcul est facile et donne

$$(uy - vx)(ux - vy) - c^2u^2 = 0. \tag{3}$$

Le lieu est une hyperbole équilatère, admettant pour asymptotes les

parallèle et perpendiculaire à Δ menées par O et passant par les foyers des coniques proposées.

Remarque. — La tangente MT est bissectrice de l'angle $\widehat{FMF'}$. Le problème actuel est donc identique à celui qui fait l'objet de l'Exercice proposé n° 46 du Chapitre IX.

4. *Soient une quadrique* Q *et un point* A. *Quel est le lieu des points* M *dont le plan polaire par rapport à* Q *est perpendiculaire à* MA? *Quel est le lieu de la droite* MA?

Considérons les quadriques H homofocales à Q. Si P est le plan polaire de M par rapport à Q, on sait que le lieu des pôles de P par rapport à H est une droite perpendiculaire à P (n° 525). Cette droite passe évidemment par M; c'est donc MA. Il s'ensuit que A est le pôle de P par rapport à une quadrique H particulière. Les plans P peuvent donc être considérés comme les plans polaires de A par rapport aux quadriques H. On sait qu'ils enveloppent une développable Δ de la troisième classe (*cf.* Exercice proposé n° 41 du Chapitre XXXIII), tangente aux plans polaires doubles du faisceau, c'est-à-dire au plan de l'infini et aux plans principaux de Q.

La courbe Γ lieu de M est polaire réciproque de Δ par rapport à Q; c'est donc une *cubique gauche passant par le centre et les points à l'infini sur les axes de* Q. *Elle passe aussi par* A, comme on le voit, en prenant pour plan P le plan polaire de A par rapport à Q. Il s'ensuit que le lieu de la droite AM est un *cône* C *du second degré*, passant par le centre et les points à l'infini sur les axes de Q (*cf.* n° 530).

Remarques. — La droite AM est perpendiculaire au plan P correspondant; *le cône* C *est donc supplémentaire du cône directeur de* Δ. La génératrice G de contact de P et de Δ est donc perpendiculaire au plan tangent T à C le long de AM. On sait, d'ailleurs, qu'elle est conjuguée de la tangente à Γ en M. Comme cette tangente est dans T, elle est *perpendiculaire à sa conjuguée*. (*Cf.* Chap. XXVII, Exercice proposé n° 14.)

Le pôle de T par rapport à Q se trouve sur G. Comme on peut remplacer Q par une quelconque des quadriques H (ce qui remplace Γ par une cubique analogue tracée sur C), on voit que G *est le lieu des pôles de* T *par rapport aux quadriques* H.

Remarquons, enfin, que la trace N de AM sur P est le point de contact de la quadrique H tangente à P, à laquelle AN est donc normale en N. On peut donc dire que *le cône* C *est le lieu des normales abaissées de* A *sur les quadriques* H.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Trouver les foyers et directrices des coniques suivantes :

$$x^2 + 7y^2 + 8xy + 2x - 1 = 0,$$

$$2x^2 + 5y^2 - 4xy - 4x - 2y - 1 = 0,$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x = 0 \qquad (\text{É. P., } 1913),$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x+3y)^2;$$

$$(u-v)^2 + 2w(2u-v) - 4w^2 = 0,$$

$$u^2 + 2v(u+w) = 0.$$

$$u^2 + v^2 - (u+v+w)(u-v+w) = 0.$$

2. Trouver le lieu des foyers des coniques tangentes à Ox et à Oy en deux points fixes A et B. Cas où OA = OB. (Prendre l'équation tangentielle de ces coniques.)

3. Trouver le lieu du foyer de la parabole H de l'Exercice proposé n° 16 du Chapitre XXXIII, quand le pôle de D par rapport à E reste fixe et que les axes de E varient arbitrairement. Montrer que, dans ces conditions, le foyer reste fixe quand l'ellipse E varie en restant homofocale à elle-même.

4. Lieu des foyers des paraboles de l'Exercice n° 31 du même Chapitre.

5. Lieu des foyers des paraboles de grandeur constante tangentes à deux droites fixes. Cas où les deux droites sont rectangulaires. (É. P., 1913.)

(Soient A et B les projections de F sur les deux droites : la distance de F à la droite AB doit être constante. Pour le cas où les deux droites sont rectangulaires, *cf.* Chap. XXXIII, Exercice résolu n° 2.)

6. On reprend l'Exercice proposé n° 32 du Chapitre XXXIII. Soient I, I′, I″ les points de rencontre de PQ, P′Q′, de PQ′, P′Q, de PP′, QQ′. On suppose que M reste fixe et que E varie en restant homofocale à elle-même.

Trouver les lieux des points I, I′, I″. Montrer que tout cercle passant par I′, I″ est orthogonal au cercle de diamètre MM′. (É. N., 1891.)

(Solution géométrique facile, en se servant des résultats déjà obtenus dans l'Exercice précité.)

7. Lieu des points de contact des tangentes menées par un point fixe P à des coniques homofocales. Cas où P est sur un axe (É. P., 1913). (*Cf.* Exercice résolu n° 3.)

8. Trouver le lieu des foyers des coniques S d'un faisceau tangentiel. Montrer que c'est aussi le lieu des points où se coupent à angle droit deux coniques S. (Théorème de Desargues.)

Quelle est l'enveloppe des axes? Examiner le cas particulier des coniques inscrites dans un rectangle et celui des paraboles inscrites dans un triangle rectangle.

(Considérer le réseau tangentiel constitué par les coniques homofocales aux coniques S et appliquer les résultats des n^{os} 512 et 513. Traiter, en outre, les cas particuliers par le calcul.)

9. Calculer la sous-tangente polaire d'une conique, en partant de l'équation polaire focale du n° 520. En déduire le théorème H du n° 519.

10. Par le foyer F d'une hyperbole dont l'excentricité est égale à 2 et par le sommet A le plus éloigné de F, on fait passer une circonférence, qui coupe l'hyperbole en trois points M, N, P différents de A.

1° Ces points forment un triangle équilatéral.

2° Les droites FM, FN, FP coupent de nouveau l'hyperbole en trois points M', N', P', sommets d'un autre triangle équilatéral.

3° Le cercle circonscrit au triangle M'N'P' passe par F et A' et coupe orthogonalement le cercle MNP. (Mosnat.)

[Prendre des coordonnées polaires. Si α désigne l'angle polaire de la tangente en F au cercle MNP, on trouve que l'équation aux ω des points M, N, P est $\tan\frac{3\omega}{2} = -\tan\alpha$. Toutes les propriétés de l'énoncé sont ensuite évidentes.]

11. Soient un foyer F d'une quadrique Q et Δ la directrice correspondante (c'est-à-dire la droite joignant les points de contact du cône isotrope de sommet F). Démontrer que, lorsque F décrit une focale Φ, Δ décrit un cylindre ayant pour section droite la polaire réciproque de Φ par rapport à la conique de section de Q par le plan de Φ. (S'appuyer sur les raisonnements du n° 523.)

12. Soient les paraboloïdes homofocaux H :

$$\frac{y^2}{p+\lambda}+\frac{z^2}{q+\lambda}-2x-\lambda=0.$$

On considère la surface Σ enveloppe des plans polaires P d'un point fixe A par rapport à ces paraboloïdes. Démontrer les propriétés suivantes :

1° Σ est de la troisième classe.

2° Son arête de rebroussement Γ est une cubique gauche, de cône directeur C du second degré.

3° La section de Σ par un plan P se compose de la génératrice de contact G et d'une conique. En déduire le degré de Σ.

4° Chaque droite telle que G est le lieu des pôles d'un plan Q par rapport aux paraboloïdes H. Ce plan Q est perpendiculaire à G.

5° Quelle est l'enveloppe C_1 des plans Q? Quelles relations y a-t-il entre C_1 et H et entre C_1 et C? (Concours général, 1900.)

(Solution analytique facile. Pour la solution géométrique, *voir* l'Exercice résolu n° 4.)

13. Les contours apparents de quadriques homofocales sur un même plan P sont des coniques homofocales.

(Les plans tangents communs aux cylindres circonscrits sont des plans isotropes fixes ayant pour traces sur P des droites isotropes.)

14. Lieu des diamètres conjugués d'un plan P par rapport à des quadriques homofocales.

[Plan Q perpendiculaire à P. (*Cf.* Exercice proposé n° 41 du Chapitre XXXIII.)]

15. Lieu des points de contact des plans parallèles à P et tangents à des quadriques homofocales.

(Hyperbole équilatère située dans le plan Q de l'Exercice précédent. Se ramène au problème suivant : Soient une conique C et des droites D parallèles; lieu de la projection sur D du pôle de cette droite par rapport à C. Faisceaux homographiques.)

16. Par une droite fixe, on mène des plans tangents à des quadriques homofocales. Trouver le lieu des normales aux points de contact. (*Cf.* Exercice proposé n° 41 du Chapitre XXXIII.)

17. Montrer que l'intersection de deux quadriques homofocales est une ligne de courbure pour chacune d'elles.

[Soient MT la tangente en M à cette ligne et P le plan tangent à la quadrique Q. Le lieu des pôles de P est la normale en M à Q. Par rapport à Q', cette normale est donc conjuguée de MT. Ces deux droites étant rectangulaires, ce sont des tangentes principales (n° 337).]

18. Montrer que les focales d'un cône du second degré sont six droites. Si, par un point F de l'une d'elles, on mène un plan perpendiculaire, la section du cône par ce plan admet F pour foyer.

19. Les cônes supplémentaires d'une famille de cônes homofocaux sont des cônes homocycliques. (Plans cycliques perpendiculaires aux focales; couper par le plan de l'infini.)

CHAPITRE XXXV.

ÉTUDE DES CONIQUES SUR LEURS ÉQUATIONS RÉDUITES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. Théorème de Joachimstal. — *Soient* A, B, C, D *les pieds des normales abaissées d'un point* P *sur une conique à centre* Γ. *Soit* D′ *le point diamétralement opposé à* D. *Les points* A, B, C, D′ *sont sur un même cercle.*

Il revient au même (n° 506) de démontrer que les droites AB et CD′ sont également inclinées sur les axes. Remarquons, d'ailleurs, que CD′ et CD sont des cordes supplémentaires (*cf.* Exercice proposé n° 13 du Chapitre XXX); elles ont, par suite, des directions conjuguées. Dès lors, nous allons démontrer que si AB et CD sont deux sécantes communes à la conique Γ et à une hyperbole d'Apollonius, la direction symétrique de AB par rapport à Ox est conjuguée de CD.

Si (u, v, w) et (u', v', w') sont les coordonnées homogènes respectives de AB et de CD, on peut écrire une identité de la forme

$$(1)\qquad \frac{x^2}{A}-\frac{y^2}{B}-1+\alpha xy+\beta x+\gamma y=(ux+vy-w)(u'x+v'y+w').$$

Il nous faut démontrer, d'autre part, que les directions de paramètres directeurs (v, u) et $(v', -u')$ sont conjuguées, c'est-à-dire que l'on a

$$(2)\qquad \frac{vv'}{A}-\frac{uu'}{B}=0.$$

Or, en égalant dans (1) les coefficients de x^2 et les coefficients de y^2, on trouve

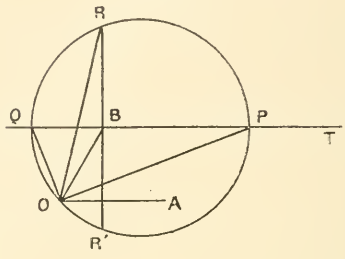
$$uu'=\frac{1}{A},\qquad vv'=\frac{1}{B}.$$

Portant dans (2), on a une identité; donc, le théorème est démontré.

2. *Construire les axes d'une ellipse, connaissant deux diamètres conjugués.*

Soient OA et OB les diamètres donnés (*fig.* 41). Menons la tangente

Fig. 41.



en B, qui est parallèle à OA, et soient P et Q les points de rencontre de cette tangente avec les axes cherchés. Comme les axes sont deux diamètres conjugués, on a (Chap. XXX, Exercice proposé n° 15)

$$\overline{BP}\cdot\overline{BQ} = -\overline{OA}^2. \tag{1}$$

Donc, si nous portons $BR = BR' = OA$ sur la perpendiculaire à BT, le cercle de diamètre PQ passe par R et R'. D'autre part, il passe par O, puisque l'angle $\widehat{POQ}$ est droit. Il est donc entièrement déterminé par les trois points R, R', O. En le traçant et prenant son intersection avec BT, on obtient les points P et Q; d'où les axes OP et OQ.

Reste à construire les longueurs a et b des demi-axes. Le triangle OBR nous donne

$$\begin{aligned}\overline{OR}^2 &= \overline{OB}^2 + \overline{BR}^2 - 2\,OB\cdot BR\cos\widehat{OBR}\\ &= \overline{OB}^2 + \overline{OA}^2 + 2\,OB\cdot OA\sin\widehat{AOB}\end{aligned}$$

ou, en utilisant les théorèmes d'Apollonius,

$$\overline{OR}^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2;$$

d'où $OR = a + b$. On trouve, de même, $OR' = a - b$. Donc,

$$a = \frac{OR + OR'}{2}, \qquad b = \frac{OR - OR'}{2}.$$

3. *Lieu des centres des triangles équilatéraux inscrits dans une ellipse.* (*Cf.* Chap. XXXII, Exercice proposé n° 15.)

Nous allons exprimer que le centre de gravité coïncide avec le centre du cercle circonscrit. Soit

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0 \tag{1}$$

l'équation de ce cercle. L'équation aux x de ses points d'intersection avec l'ellipse est

$$[c^2x^2-2a^2\alpha x+a^2(b^2+\gamma)]^2+4\beta^2a^2b^2(x^2-a^2)=0.$$

La somme des racines est $\frac{4a^2\alpha}{c^2}$. Donc, si ξ désigne l'abscisse du quatrième point de rencontre, on doit avoir

$$3\alpha+\xi=\frac{4a^2\alpha}{c^2};$$

d'où

$$\xi=\frac{\alpha}{c^2}(4a^2-3c^2)=\frac{\alpha}{c^2}(a^2+3b^2).$$

En échangeant ξ et η, α et β, a et b, on a

$$\eta=\frac{\beta}{-c^2}(b^2+3a^2).$$

En écrivant que ξ, η satisfont à l'équation de l'ellipse, on a l'équation du lieu :

$$\frac{\alpha^2(a^2+3b^2)^2}{a^2c^4}+\frac{\beta^2(b^2+3a^2)^2}{b^2c^4}-1=0.$$

Le lieu est une ellipse de demi-axes $\frac{ac^2}{a^2+3b^2}$ et $\frac{bc^2}{b^2+3a^2}$.

4. *Soient deux paraboles* P *et* P′ *ayant même sommet et orthogonales en ce point. Il existe une infinité de triangles* ABC *inscrits dans* P *et circonscrits à* P′. (Exercice proposé n° 20 du Chapitre XXXII.)

1° *Les normales en* A, B, C *sont concourantes; trouver le lieu du point de concours.*

2° *Les hauteurs du triangle* ABC *sont normales à une parabole* P″.

3° *Si,* A *restant fixe, ainsi que* P, *on fait varier le paramètre de* P′, *le côté* BC *se déplace parallèlement à lui-même.*

Soient

$$(P) \qquad y^2 - 2px = 0,$$

$$(P') \qquad x^2 - 2p'y = 0$$

les équations des deux paraboles.

Cherchons la condition pour que la corde joignant les points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ de P soit tangente à P'. Cette corde a pour équation

$$\frac{x - \frac{y_1^2}{2p}}{\frac{y_2^2 - y_1^2}{2p}} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

ou, en supprimant le facteur $y_2 - y_1$ et ordonnant,

$$(1) \qquad 2px - y(y_1 + y_2) + y_1 y_2 = 0.$$

Écrivons que les coefficients de cette équation satisfont à l'équation tangentielle de P', $p'u^2 - 2vw = 0$:

$$(2) \qquad 4p^2 p' + 2(y_1 + y_2) y_1 y_2 = 0.$$

Cela posé, soient (x_1, y_1) les coordonnées du point A. Nous aurons l'équation aux y des points B et C, en remplaçant y_2 par y dans (2) :

$$(3) \qquad y^2 + yy_1 + \frac{2p^2 p'}{y_1} = 0.$$

Si y_2 et y_3 désignent les racines, nous avons

$$(4) \qquad y_2 + y_3 = -y_1,$$

$$(5) \qquad y_2 y_3 = \frac{2p^2 p'}{y_1}.$$

Pour prouver que BC est tangent à P', il nous suffit de vérifier que l'équation (2) est satisfaite, quand on y remplace y_1 par y_3. Cette vérification est immédiate, en utilisant (4) et (5).

1° La relation (4) nous prouve que le centre de gravité du triangle ABC est sur Oy. Donc, les normales en A, B, C sont concourantes. (Exercice proposé n° 33.)

D'ailleurs, si (x_0, y_0) sont les coordonnées du point de concours P, nous avons, d'après l'équation (69) du n° 543 et en utilisant tou-

jours (4) et (5),

$$2p(p-x_0)=y_1(y_2+y_3)+y_2y_3=-y_1^2+\frac{2p^2p'}{y_1},$$
$$2p^2y_0=y_1y_2y_3=2p^2p'.$$

La dernière équation nous donne $y_0=p'$. *Le lieu du point* P *est donc la droite symétrique de* Ox *par rapport au foyer de* P'.

2° La hauteur issue de A a pour équation, en se servant de (1), puis de (4),

$$\frac{x-x_1}{2p}=\frac{y-y_1}{-(y_2+y_3)},$$

ou

$$\left(x-\frac{y_1^2}{2p}\right)y_1-2p(y-y_1)=0,$$

ou

$$y_1^3-2p(2p+x)y_1+4p^2y=0. \tag{6}$$

L'enveloppe de cette droite a pour équation (n° 272)

$$-2(x+2p)^3+27py^2=0. \tag{7}$$

On reconnaît la forme générale de l'équation des développées de parabole (*cf.* Exercice proposé n° 35). En comparant avec l'équation (71) du n° 543, on trouve que l'équation (7) représente la développée de la parabole P'' :

$$y^2=8p(x+6p). \tag{8}$$

3° D'après (1) et (4), le coefficient angulaire de BC est

$$-\frac{2p}{y_1}=-\frac{y_1}{x_1}.$$

Donc, BC a une direction symétrique de OA par rapport à Ox, et, par suite, constante dans les conditions de l'énoncé. Ceci est, du reste, évident, d'après le théorème de Joachimstal (Exercice proposé n° 34) et d'après les propriétés des sécantes communes à un cercle et à une conique (n° 506).

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Désignant par φ l'angle d'anomalie excentrique d'un point M d'une ellipse E, on pose $e^{i\varphi}=t$. Calculer les coordonnées de M en fonction

de t. Trouver la relation qui doit lier les t, puis les φ de quatre points de E pour qu'ils soient sur un même cercle ou sur une même hyperbole équilatère d'asymptotes parallèles aux axes.

Montrer que, par tout point A de E, on peut mener trois cercles osculateurs à E. Soient M_1, M_2, M_3 les points de contact. Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ a son centre de gravité au centre de l'ellipse. Réciproque. Montrer que le cercle circonscrit à ce triangle passe par A.

(Condition pour que quatre points soient sur un cercle :

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4=2k\pi.$$

Le triangle $M_1M_2M_3$ est la projection d'un triangle équilatéral.)

2. La normale en M à une conique à centre rencontre les axes de cette conique en A et B. Démontrer que $\frac{MA}{MB}$ demeure constant, quand M varie.

3. Démontrer que l'hyperbole d'Apollonius du point P est le lieu des points M dont la polaire est perpendiculaire à MP.

4. Soient trois points A, B, C d'une conique à centre, d'axes Ox et Oy. Par A on mène une parallèle à Oy et par B une parallèle à Ox; soit γ leur point de rencontre. Soient α et β les points de rencontre de AC avec Ox et de BC avec Oy. Démontrer que la condition nécessaire et suffisante, pour que les normales en A, B, C à la conique soient concourantes est que les points α, β, γ soient en ligne droite.

[Appliquer le théorème de Pascal (n° 568) aux points A, B, C, O et à l'infini sur les axes. Ces six points doivent être sur une hyperbole d'Apollonius.]

5. Un point P décrit la normale en M à une ellipse. Soient A, B, C les pieds des trois autres normales issues de P. Trouver les lieux du centre de gravité, de l'orthocentre et du centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

[Soient x_1, y_1 les coordonnées de M et $x_1\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)$, $y_1\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)$ celles de P. En formant l'équation aux x des pieds des normales, divisant par $x-x_1$ et prenant la somme des racines, on trouve l'abscisse du centre de gravité G :

$$\xi=\frac{a^2+b^2+2\lambda}{3c^2}x_1.$$

Pour former l'équation du cercle ABC, on porte l'origine en M dans

les équations de l'ellipse et de l'hyperbole d'Apollonius. Ces deux équations prennent la forme

$$XA + YB = 0, \qquad XA' + YB' = 0.$$

La conique $AB' - BA' = 0$ est une parabole d'axe parallèle à l'un des axes de coordonnées, qui passe par A, B, C. Le cercle cherché fait partie du faisceau déterminé par cette parabole et par l'ellipse; cela permet de former son équation et de trouver son centre I. En revenant aux anciens axes, on trouve, par exemple, pour abscisse de I :

$$\alpha = \frac{x_1(b^2 + \lambda)}{2a^2}.$$

L'abscisse de l'orthocentre est, ensuite, égale à

$$3\xi - 2\alpha = \frac{x_1}{a^2}\,\frac{a^4 + b^4 + \lambda(a^2 + b^2)}{c^2}.$$

Les lieux demandés se déduisent aisément de ces résultats.]

6. Discuter la réalité des normales par la méthode de l'équation en λ (n° 486) appliquée à l'intersection de la conique et de l'hyperbole d'Apollonius.

7. Soient A, B, C, D les pieds des normales à une ellipse issues d'un point P. Soient (x_1, y_1) les coordonnées du pôle de AB et (x_2, y_2) les coordonnées du pôle de CD.

Démontrer les formules suivantes, dites *formules de Desboves* :

$$x_1 x_2 = -a^2, \qquad y_1 y_2 = -b^2.$$

Calculer les coordonnées de P en fonction de x_1, y_1. (*Cf.* N$_{\text{II}}$, p. 198.)

8. Calculer l'équation ponctuelle entière et l'équation tangentielle de la développée de l'ellipse ou de l'hyperbole.

9. La normale en M à une ellipse E rencontre Ox en A et Oy en B. On considère le point P, qui se projette en A sur Ox et en B sur Oy. Montrer que ce point décrit une ellipse E', dont la tangente PT' est symétrique de PC par rapport à PA, C désignant le centre de courbure de E en M.

[Utiliser les équations (26) et (28) du n° 332.]

10. Soit R le rayon de courbure d'une ellipse en M et d la distance du

centre à la tangente en M. Démontrer que le produit $R\,d^3$ demeure constant, quand M décrit l'ellipse. (É. P., 1906.)

11. On garde les notations précédentes et l'on appelle ρ la longueur du demi-diamètre conjugué de OM. Montrer que $R\,d = \rho^2$. (E. P., 1906.)

12. Enveloppe des cordes d'une conique à centre vues de ce centre sous un angle droit.

[Cercle concentrique. Utiliser la formule (33) du n° 533.]

13. Étudier les variations de l'angle de deux diamètres conjugués d'une ellipse.

14. Chercher les diamètres conjugués égaux d'une ellipse.

15. Comment obtient-on les triangles d'aire maximum inscrits dans une ellipse? Quels sont les lieux de leurs orthocentres et des centres de leurs cercles circonscrits?

(Projections de triangles équilatéraux. Les anomalies excentriques des sommets sont φ, $\varphi + \frac{2\pi}{3}$, $\varphi + \frac{4\pi}{3}$. L'orthocentre a pour coordonnées $-\frac{c^2}{2a}\cos 3\varphi$, $-\frac{c^2}{2b}\sin 3\varphi$. Le centre de gravité est en O. Le centre du cercle circonscrit s'en déduit.)

16. Soient une ellipse et une hyperbole homofocales rapportées à leurs axes communs et d'excentricités respectives e et e'. Montrer que les abscisses de leurs points d'intersection sont $\pm \frac{c}{ee'}$.

[Appliquer les formules (41) et (42) du n° 534, en écrivant que $r' - r = 2a'$.]

17. En Astronomie, on appelle *anomalie vraie* d'un point M sur une ellipse, de foyer F et d'axe focal Fx, l'angle $v = \left(\widehat{Fx, FM}\right)$. Démontrer que cet angle est lié à l'anomalie excentrique par la relation

$$\operatorname{tang}\frac{v}{2} = \operatorname{tang}\frac{u}{2}\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right),$$

où l'on a posé $\cos\varphi = \frac{b}{a}$, $\sin\varphi = e$.

[Partir de $r\cos v = a(\cos u - e)$, $r\sin v = b\sin u$, $r = a(1 - e\cos u)$. Puis, écrire : $\operatorname{tang}\frac{v}{2} = \frac{\sin v}{1 + \cos v}$.]

18. Soient les formules

$$x = \cos u \operatorname{ch} v, \qquad y = \sin u \operatorname{sh} v. \tag{1}$$

Montrer que les lignes $v = \text{const.}$ et $u = \text{const.}$ sont des ellipses et des hyperboles homofocales. Quelles relations y a-t-il entre les paramètres v et u et les paramètres λ_1 et λ_2 du n° 537 ? Comparer les formules ci-dessus avec les formules (53) de ce numéro.

Calculer en fonction de du et dv le carré de l'élément linéaire

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

et déduire du résultat obtenu que chacune des lignes $Au + Bv + C = 0$ coupe sous un angle constant toutes les ellipses et hyperboles ci-dessus. [$ds^2 = (\operatorname{ch}^2 v - \cos^2 u)(du^2 + dv^2)$. Puis. *voir* n° 400.]

19. Gardant les notations ci-dessus, on considère les quatre points $A(u_0, v_0)$, $B(u_0, v_1)$, $C(u_1, v_0)$, $D(u_1, v_1)$. Vérifier que les distances AD et BC sont égales.

20. Soit une famille de cercles focaux Γ d'une conique C. On considère les points P et P′, centres des deux sphères de rayon nul passant par Γ. Montrer que le lieu de ces points est une focale de C. (Évident géométriquement.)

21. Démontrer les réciproques des propriétés trouvées au n° 538.

22. Soient A et B deux points fixes et M un point variable d'une ellipse E. Soient OA′ et OB′ les demi-diamètres parallèles à MA et MB. Montrer que l'aire du secteur elliptique OA′B′ est constante. (Évident par projection.)

23. Quel est le lieu des points de rencontre des tangentes à une ellipse aux extrémités de deux diamètres conjugués? (Évident par projection.)

24. Démontrer le théorème de l'Exercice proposé n° 13 du Chapitre XXX en considérant l'ellipse comme projection d'un cercle.

25. Même question pour le second théorème d'Apollonius.

26. Démontrer analytiquement les propriétés du n° 540.

27. Les notations étant celles du n° 540, on prend le point M′ symétrique de M par rapport à la perpendiculaire au milieu de OQ. Montrer

que le point M′ décrit un cercle et que le rapport $\frac{m\mathrm{M}}{m\mathrm{M}'}$ est constant, m étant la projection de M sur $\mathrm{O}x$. En déduire que le lieu de M est une ellipse.

28. Enveloppe des droites qui déterminent avec deux droites fixes un triangle OAB d'aire constante. Lieu du centre de gravité de ce triangle.

29. Construire l'axe transverse d'une hyperbole, connaissant les asymptotes et un point.

30. Soient une hyperbole équilatère et deux points diamétralement opposés de cette hyperbole, M et M′. Du point M comme centre, on décrit un cercle passant par M′. Montrer que ses trois autres points de rencontre avec l'hyperbole forment un triangle équilatéral. Réciproque.

(Rapporter l'hyperbole à ses asymptotes et exprimer que le centre du cercle coïncide avec le centre de gravité du triangle.)

31. Soit une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes :

1° Quelle relation doit lier les abscisses de quatre points de cette hyperbole pour qu'ils soient sur un même cercle?

2° Montrer que par deux points pris sur une même branche de l'hyperbole, on peut mener deux cercles tangents à cette courbe et que les points de contact sont diamétralement opposés.

3° Par un point M de l'hyperbole, on peut mener un seul cercle osculateur en un point P autre que M. Trouver l'enveloppe de la droite PM et montrer que le point de contact T est tel que $\overline{\mathrm{TM}} = 3\overline{\mathrm{TP}}$.

32. Quel est le lieu des sommets des angles de grandeur constante V circonscrits à une parabole?

(Hyperbole admettant les foyer et directrice de la parabole et ayant pour excentricité $\frac{1}{\cos \mathrm{V}}$.)

33. La condition nécessaire et suffisante pour que les normales en trois points A, B, C d'une parabole soient concourantes est que le centre de gravité du triangle ABC soit sur l'axe de la parabole. Quel est le lieu décrit par le point de concours quand le centre de gravité est fixe?

34. Théorème de Joachimstal. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les normales ci-dessus soient concourantes, est que le cercle circonscrit au triangle* ABC *passe au sommet de la parabole.* Calculer

les coordonnées du point de concours en fonction de celles du centre de ce cercle.

35. Montrer que toute équation de la forme

$$y^2 = A(x - a)^3$$

représente la développée d'une parabole d'axe Ox.

[Développée de la parabole

$$y^2 = \frac{16}{27A}\left(x + \frac{8}{27A} - a\right).]$$

36. Montrer que toute équation de la forme

$$\lambda^3 + \lambda(ax - b) + a'y + b' = 0,$$

où λ désigne un paramètre variable et a, b, a', b' des constantes, représente les normales à une parabole.

Généraliser en remplaçant le coefficient de λ et le terme indépendant par des premiers membres d'équations de droites rectangulaires.

37. Étant donnée une parabole, on mène du point P les tangentes PA et PB, puis les normales AQ et BQ. Calculer les coordonnées de Q en fonction de celles de P. Calculer également les coordonnées du pied C de la troisième normale issue de Q. Quel est le lieu de Q quand P décrit un diamètre de la parabole? Quel est le lieu de P quand Q décrit une droite? Quel est le lieu de P quand Q décrit la parabole? Ce dernier lieu se décompose en une droite et une cubique. Expliquer la raison de cette décomposition.

(Lorsque Q est sur la parabole, il se confond soit avec C, soit avec A ou B.)

38. Écrire l'équation de la normale à une parabole en fonction de son coefficient angulaire. En déduire le lieu des points d'où l'on peut mener deux normales rectangulaires. Rapprocher ce résultat d'un des résultats de l'Exercice précédent.

39. Soit une parabole de foyer F. Soit C le centre de courbure en M. Trouver le lieu de la projection de C sur MF. (É. P., 1913.)

[Parabole symétrique par rapport à F. (*Cf.* Chapitre XXIV, Exercice proposé n° 28.)]

40. Démontrer que le cercle circonscrit à un triangle circonscrit à une parabole passe par le foyer.

[Appliquer le théorème de Simson. (*Cf.* Chapitre XXXII, Exercice proposé n° 16.)]

41. Par un point fixe P, on mène les tangentes à une famille de paraboles homofocales. Trouver l'enveloppe des normales aux points de contact.

[Prendre une droite D quelconque passant par P, puis le lieu Δ des pôles de cette droite par rapport aux paraboles, en utilisant l'équation (82) du n° 547. La droite Δ est une des normales considérées (n° 516). L'enveloppe est une parabole.]

42. Trouver le lieu des points par où passent deux cercles focaux orthogonaux d'une parabole.

43. Que devient l'équation d'une conique à centre, quand on transporte l'origine en un sommet, l'axe des y étant la tangente en ce point? Chercher la limite de cette équation, quand le deuxième sommet de Ox s'éloigne indéfiniment, le coefficient de x^2 restant constant ou bien le foyer le plus rapproché de O restant fixe.

CHAPITRE XXXVI.

ÉTUDE DES QUADRIQUES SUR LEURS ÉQUATIONS RÉDUITES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Démontrer que par les pieds des normales abaissées d'un point* P *sur un ellipsoïde* E, *on peut faire passer une infinité de quadriques* Q *concentriques à* E. (Agrégation 1883 : extrait.)

Prenons les notations du n° 550. Soit

$$(1) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz - 2b'zx + 2c'xy - 1 = 0$$

l'équation d'une quadrique Q. Celle-ci rencontre la cubique de Chasles en six points, dont les λ sont donnés par l'équation

$$(2) \qquad \sum a \frac{A^2 x_0^2}{(A+\lambda)^2} + 2\sum a' \frac{BC y_0 z_0}{(B+\lambda)(C+\lambda)} - 1 = 0.$$

Cette équation doit avoir mêmes racines que l'équation (8) du n° 550. On en conclut que les fractions rationnelles qui constituent les premiers membres de ces équations doivent être identiques, car elles ont mêmes pôles, mêmes zéros et même partie entière : -1. Dès lors, on doit d'abord avoir $a = \frac{1}{A}$, $b = \frac{1}{B}$, $c = \frac{1}{C}$. Puis, les résidus de (2) doivent être nuls, puisqu'il en est ainsi pour (8). Or, le résidu relatif au pôle $\lambda = -A$ est

$$\frac{2b'CAz_0x_0}{C-A} - \frac{2c'ABx_0y_0}{A-B}.$$

En l'annulant, ainsi que les deux autres résidus, on obtient les conditions

$$\frac{a'}{A(C-B)x_0} = \frac{b'}{B(A-C)y_0} = \frac{c'}{C(B-A)z_0}.$$

En définitive, l'équation générale des quadriques Q est

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 + 2\lambda[A(C-B)x_0yz + B(A-C)y_0zx + C(B-A)z_0xy] = 0.$$

2. *Soient d, d', d'' les distances du centre d'un ellipsoïde aux plans tangents aux extrémités de trois diamètres conjugués. Démontrer que* $\frac{1}{d^2}+\frac{1}{d'^2}+\frac{1}{d''^2}=\text{const.}$ (E. P., 1913.)

La distance d de l'origine au plan tangent en $M(x, y, z)$ est donnée par la formule

$$d^2=\frac{1}{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}.$$

Si l'on garde les notations du n° 552, on a

$$\frac{1}{d^2}+\frac{1}{d'^2}+\frac{1}{d''^2}=\frac{x^2+x'^2+x''^2}{a^4}+\frac{y^2+y'^2+y''^2}{b^4}+\frac{z^2+z'^2+z''^2}{c^4}$$
$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2},$$

en se servant de la formule (14) établie au n° 552 et des formules analogues.

3. *Calculer* $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ *en fonction des coordonnées elliptiques* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *et de leurs différentielles.*

Différentions logarithmiquement les formules (27) du n° 555, nous obtenons

$$2\frac{dx}{x}=\frac{d\lambda_1}{A+\lambda_1}+\frac{d\lambda_2}{A+\lambda_2}+\frac{d\lambda_3}{A+\lambda_3}.$$

et les formules analogues. Nous avons donc

$$4\,ds^2=\Sigma\, d\lambda_1^2\left[\frac{x^2}{(A+\lambda_1)^2}+\frac{y^2}{(B+\lambda_1)^2}+\frac{z^2}{(C+\lambda_1)^2}\right]$$
$$+2\Sigma\, d\lambda_2\,d\lambda_3\left[\frac{x^2}{(A+\lambda_2)(A+\lambda_3)}+\frac{y^2}{(B+\lambda_2)(B+\lambda_3)}\right.$$
$$\left.+\frac{z^2}{(C+\lambda_2)(C+\lambda_3)}\right].$$

Le coefficient de $d\lambda_2\,d\lambda_3$ est nul, en vertu de l'orthogonalité des surfaces (λ_2), (λ_3). Il en est de même pour les deux autres rectangles.

Pour calculer le coefficient H_1^2 de $d\lambda_1^2$, dérivons par rapport à λ l'identité (n° 555)

$$\frac{x^2}{A+\lambda}+\frac{y^2}{B+\lambda}+\frac{z^2}{C+\lambda}-1\equiv\frac{(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)}{(A+\lambda)(B+\lambda)(C+\lambda)}$$

et faisons ensuite $\lambda = \lambda_1$. La dérivée du premier membre devient $-H_1^2$. Quant à la dérivée du second membre, elle comprend plusieurs termes. Le seul qui ne s'annule pas pour $\lambda = \lambda_1$ est celui qui provient de la dérivation du facteur $\lambda_1 - \lambda$, c'est-à-dire $-\dfrac{(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)}{(A+\lambda)(B+\lambda)(C+\lambda)}$. Nous avons donc

$$H_1^2 = \frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}{(A+\lambda_1)(B+\lambda_1)(C+\lambda_1)}$$

et des formules analogues pour H_2^2 et H_3^2. Finalement,

$$ds^2 = \frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\,d\lambda_1^2}{(A+\lambda_1)(B+\lambda_1)(C+\lambda_1)} + \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)\,d\lambda_2^2}{(A+\lambda_2)(B+\lambda_2)(C+\lambda_2)} + \frac{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_3)\,d\lambda_3^2}{(A+\lambda_3)(B+\lambda_3)(C+\lambda_3)}.$$

4. *Étant donnés un hyperboloïde* H *et un point* P, *on demande l'enveloppe des plans* H *passant par* P *et coupant* H *suivant une hyperbole équilatère.*

Le plan H′, parallèle à un plan H et mené par le centre de H, doit couper le cône asymptote suivant deux droites rectangulaires et réciproquement (n° 460). L'enveloppe demandée est donc un cône C déduit, par la translation $\overrightarrow{OP}$, du cône C′ enveloppe des plans H′. Nous sommes ramenés à trouver ce cône C′. Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{1}$$

$$ux + vy + wz = 0 \tag{2}$$

les équations du cône asymptote et du plan H′. La projection des deux génératrices d'intersection sur xOy a pour équation (n° 51)

$$w^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{(ux+vy)^2}{c^2} = 0$$

ou

$$\frac{y^2}{x^2}\left(\frac{w^2}{b^2} - \frac{v^2}{c^2}\right) - 2\frac{y}{x}\frac{uv}{c^2} + \frac{w^2}{a^2} - \frac{u^2}{c^2} = 0. \tag{3}$$

Soient m et m' les deux racines de cette équation en $\dfrac{y}{x}$. Les paramètres directeurs des deux génératrices sont $1, m, -\dfrac{u+vm}{w}$ et $1, m', -\dfrac{u+vm'}{w}$.

Leur condition d'orthogonalité est donc

$$1 + mm' + \frac{(u + vm)(u + vm')}{w^2} = 0$$

ou

$$(w^2 + u^2) + mm'(w^2 + v^2) + uv(m + m') = 0.$$

En tenant compte des relations entre les coefficients et les racines de (3), cette condition s'écrit

$$(w^2 + u^2)\left(\frac{w^2}{b^2} - \frac{v^2}{c^2}\right) + 2\frac{u^2v^2}{c^2} + (w^2 + v^2)\left(\frac{w^2}{a^2} - \frac{u^2}{c^2}\right) = 0$$

ou, en divisant par w^2,

$$(4) \qquad u^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) + v^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) + w^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 0.$$

Telle est l'équation tangentielle du cône C'. Son équation ponctuelle est

$$\frac{x^2}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}} + \frac{z^2}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = 0.$$

Le cône C' est un *cône du second degré*, qui n'est réel que si c est plus petit que l'un au moins des deux nombres a et b.

5. *Chercher la ligne de striction d'un hyperboloïde à une nappe.*

Reprenons les notations du n° 556. Écrivons que les plans (32) et (33) sont perpendiculaires (n° 371) :

$$\frac{(1 + uv)(1 - u^2)}{a^2} + \frac{2u(u - v)}{b^2} + \frac{(1 - uv)(1 + u^2)}{c^2} = 0;$$

d'où nous tirons

$$(1) \qquad v = \frac{\beta + \alpha u^2}{u(\alpha + \beta u^2)},$$

en posant, pour abréger l'écriture,

$$(2) \qquad \alpha = \frac{1}{c^2} + \frac{2}{b^2} - \frac{1}{a^2}, \qquad \beta = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Tel est *le v du point central* de la génératrice (u). En portant dans les équations (31) du n° 556, on obtient les équations paramétriques de *la*

ligne de striction des génératrices du premier système :

$$(3)\qquad \begin{cases} x = a\dfrac{(\alpha+\beta)u(1+u^2)}{\beta u^4+2\alpha u^2+\beta}, \\ y = b\dfrac{\beta(u^4-1)}{\beta u^4+2\alpha u^2+\beta}, \\ z = c\dfrac{(\alpha-\beta)u(1-u^2)}{\beta u^4+2\alpha u^2+\beta}. \end{cases}$$

Cette ligne est donc une *quartique unicursale*. Elle admet Ox, Oy, Oz pour axes de symétrie, comme on le voit en changeant u en $\frac{1}{u}$ ou en $-u$ ou en $-\frac{1}{u}$; mais les plans de coordonnées ni l'origine ne sont des éléments de symétrie.

La ligne de striction des génératrices du second système est symétrique de la précédente par rapport aux plans de coordonnées ou par rapport à l'origine.

Dans le cas où $a=b$, c'est-à-dire *lorsque l'hyperboloïde est de révolution*, on a $\alpha=\beta$. L'équation (1) se réduit à $v=\frac{1}{u}$ et les équations (3) montrent que *les deux lignes de striction se confondent avec le cercle de gorge.*

6. *D'un point* P, *pris sur la normale* MN *en* M *à un paraboloïde elliptique, on peut mener quatre autres normales. Soient* A, B, C, D *leurs pieds. Former l'équation de la sphère* S *passant par ces quatre points. Trouver le lieu du centre* I *de cette sphère, quand* P *décrit* MN. (Concours général, 1883.)

Soit

$$(1)\qquad \frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x=0$$

l'équation du paraboloïde. Soient (ξ, η, ζ) les coordonnées de M, liées par la relation

$$(2)\qquad \frac{\eta^2}{p}+\frac{\zeta^2}{q}-2\xi=0.$$

Soient maintenant

$$(3)\qquad x_0=\xi-\rho,\qquad y_0=\eta\left(1+\frac{\rho}{p}\right),\qquad z_0=\zeta\left(1+\frac{\rho}{q}\right)$$

les coordonnées du point P. Les pieds des normales issues de P sont

donnés par les formules

$$(4)\qquad x = x_0 + \lambda, \qquad y = y_0 \frac{p}{p+\lambda}, \qquad z = z_0 \frac{q}{q+\lambda},$$

λ étant donné par l'équation

$$(5)\qquad \frac{y_0^2 p}{(p+\lambda)^2} + \frac{z_0^2 q}{(q+\lambda)^2} - 2(x_0+\lambda) = 0.$$

Cette équation admet la racine $\lambda = \rho$, comme il résulte de la comparaison des formules (3) et (4). On met d'ailleurs en évidence le facteur $\rho - \lambda$, en retranchant (2) de (5), après avoir remplacé y_0, z_0, x_0 par (3). En supprimant ce facteur, il reste l'équation aux λ des points A, B, C, D :

$$(6)\qquad f(\lambda) \equiv \frac{\eta^2(2p+\rho+\lambda)}{p(p+\lambda)^2} + \frac{\zeta^2(2q+\rho+\lambda)}{q(q+\lambda)^2} + 2 = 0.$$

Soit maintenant

$$(7)\qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$$

l'équation de la sphère S. La cubique (4) la coupe en six points, dont les λ sont donnés par

$$(8)\qquad \varphi(\lambda) = (x_0+\lambda)^2 + \frac{p^2 y_0^2}{(p+\lambda)^2} + \frac{q^2 z_0^2}{(q+\lambda)^2} - 2\alpha(x_0+\lambda) - 2\beta\frac{p y_0}{p+\lambda} - 2\gamma\frac{q z_0}{q+\lambda} + \delta = 0.$$

Cette équation doit admettre les quatre racines de (6), plus deux autres racines, que nous pouvons considérer comme les racines du trinome $\lambda^2 + a\lambda + b$, a et b étant des paramètres inconnus. Dès lors, on doit avoir l'identité

$$(9)\qquad f(\lambda)(\lambda^2 + a\lambda + b) \equiv 2\varphi(\lambda),$$

car les fractions rationnelles des deux membres ont mêmes pôles, mêmes zéros et même coefficient de λ^2 dans la partie entière.

Le second membre est décomposé en éléments simples. Nous allons décomposer le premier et identifier les deux décompositions.

Calculons la partie infinie relative au pôle $\lambda = -p$. En faisant le changement de variable $\lambda = -p + \mu$ (t. I, n° 215), on trouve

$$\frac{\eta^2(p+\rho)(p^2 - ap + b)}{p(\lambda+p)^2} + \frac{\eta^2(-p^2 - 2p\rho + a\rho + b)}{p(\lambda+p)}.$$

En comparant à $2\varphi(\lambda)$, on a

$$2p^2y_0^2 = r_1^2\left(1+\frac{\rho}{p}\right)(p^2 - ap + b), \tag{10}$$

$$-4\beta p y_0 = \frac{r_1^2(-p^2 - 2p\rho + a\rho + b)}{p}. \tag{11}$$

En tenant compte de (3), (10) s'écrit

$$b = p(2\rho + p + a). \tag{12}$$

En portant dans (11) et tenant toujours compte de (3), il vient ensuite

$$-4\beta p = r_1 a. \tag{13}$$

Le pôle $\lambda = -q$ donnerait de même, par symétrie,

$$b = q(2\rho + q + a). \tag{14}$$

$$-4\gamma q = \xi a. \tag{15}$$

En comparant (12) et (14), on trouve

$$a = -2\rho - p - q; \tag{16}$$

puis

$$b = -pq, \tag{17}$$

$$\beta = \frac{r_1(2\rho + p + q)}{4p}, \tag{18}$$

$$\gamma = \frac{\xi(2\rho + p + q)}{4q}. \tag{19}$$

Calculons enfin la partie entière de $f(\lambda)(\lambda^2 + a\lambda + b)$. Le premier terme de $f(\lambda)$ nous donne, en effectuant le produit par $\lambda^2 + a\lambda + b$, mais se limitant au terme en λ^2,

$$\frac{r_1^2}{p}\,\frac{\lambda^3 + \lambda^2(2p + \rho + a) + \dots}{\lambda^2 + 2\lambda p + p^2}.$$

En faisant ensuite la division, on a comme partie entière

$$\frac{r_1^2}{p}(\lambda + \rho + a).$$

Le second terme de $f(\lambda)$ donne de même $\frac{\xi^2}{q}(\lambda + \rho + a)$ et le troisième $2\lambda^2 + 2a\lambda + 2b$. En tout, on a, en tenant compte de (2),

$$2\xi(\lambda + \rho + a) + 2\lambda^2 + 2a\lambda + 2b.$$

En identifiant avec la partie entière de 2φ, on a

$$2(x_0 - \alpha) = \xi + a, \tag{20}$$

$$x_0^2 - 2\alpha x_0 + \delta = \xi(\rho + a) + b \tag{21}$$

ou, en tenant compte de (3), (16) et (17),

$$\alpha = \frac{\xi + p + q}{2}, \tag{22}$$

$$\delta = -(\rho + p)(\rho + q). \tag{23}$$

Finalement, *l'équation de* S *est*

$$x^2 + y^2 + z^2 - (\xi + p + q)x - \frac{(2\rho - p + q)}{2}\left(\frac{\eta y}{p} + \frac{\zeta z}{q}\right) - (\rho + p)(\rho + q) = 0. \tag{24}$$

Lorsque ρ varie, *le lieu du centre* $\mathrm{I}(\alpha, \beta, \gamma)$ *est une droite* ayant pour équations

$$x = \frac{\xi + p + q}{2}, \qquad \frac{py}{\eta} = \frac{qz}{\zeta}. \tag{25}$$

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Étant donné un ellipsoïde, trouver le lieu des sommets des cônes circonscrits ayant pour traces sur un plan principal une parabole, une hyperbole équilatère, ou un cercle.

[Évident géométriquement, en considérant la section du cône par le plan parallèle au plan sécant mené par le sommet.]

2. Lieu des points d'où l'on peut mener à une quadrique à centre trois tangentes formant un trièdre trirectangle.

[Exprimer que le cône de l'Exercice précédent est capable d'un trièdre trirectangle inscrit (*cf.* Chap. XXXI, Exercice proposé n° 1).]

3. Trouver le lieu des points S d'où l'on peut mener trois plans tangents rectangulaires (*cf.* n° 350), en exprimant que le cône circonscrit de sommet S est capable d'un trièdre trirectangle circonscrit.

[Former l'équation tangentielle du cône en u, v, w (section par le plan de l'infini; *cf.* n° 377) et se reporter à l'Exercice proposé n° 1 du Chapitre XXXI.]

4. La normale en M à une quadrique rencontre les plans principaux en A, B, C. Montrer que les rapports $\frac{\overline{MA}}{\overline{MC}}$, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$ sont constants.

5. Donner une définition géométrique de la cubique de Chasles. (*Cf.* Chap. XXXIV, Exercice résolu n° 4.)

6. Former l'équation du cône des normales (n° 550). Vérifier qu'elle ne change pas quand on remplace la quadrique par une quadrique homofocale. En déduire une définition géométrique simple de ce cône.

7. Que devient le problème des normales issues d'un point P, quand ce point est dans le plan principal? Quel est le lieu des pieds, quand P décrit une droite de ce plan? Quel est le lieu du point P, quand les deux normales non situées dans le plan principal sont rectangulaires ou, plus généralement, font un angle constant quelconque?

8. Soient une quadrique à centre et P un point fixe de cette quadrique. On considère un trièdre trirectangle quelconque de sommet P. Il perce la quadrique en trois points A, B, C. Montrer que le plan ABC passe par un point fixe Q (*théorème de Frégier*). Vérifier que ce point est sur la normale en P. Trouver son lieu, quand P décrit la quadrique.

[Former l'équation du cône ayant pour sommet P et pour base la section de la quadrique par un plan quelconque. Écrire que ce cône est capable d'un trièdre trirectangle inscrit; on obtient l'équation tangentielle du point Q.]

9. Déterminer les centres de courbure principaux en un point P quelconque d'une quadrique à centre.

[Considérer ces centres comme points focaux de la normale (n° 387). Leurs coordonnées sont de la forme $x\left(1+\frac{\lambda}{A}\right)$, $y\left(1+\frac{\lambda}{B}\right)$, $z\left(1+\frac{\lambda}{C}\right)$, avec

$$\frac{x^2}{A(A+\lambda)}+\frac{y^2}{B(B+\lambda)}+\frac{z^2}{C(C+\lambda)}=0.\]$$

10. Soient trois demi-diamètres d'un ellipsoïde, formant un triangle trirectangle. Quelle est l'enveloppe du plan passant par leurs extrémités? (*Cf.* n° 351 et Exercice proposé n° 12 du Chapitre XXXV.)

11. Soit un ellipsoïde E. On le coupe par un plan diamétral P quelconque. On porte les longueurs des demi-axes de l'ellipse de sec-

tion sur le diamètre perpendiculaire à P, à partir du centre. Trouver le lieu des extrémités de ces longueurs.

[Ce lieu est une surface du quatrième degré, appelée *surface d'onde* de l'ellipsoïde (*cf.* N_{III}, p. 206 et 480). Pour calculer les demi-axes de la section, appliquer la méthode de Gallois (n° 478), en coupant par une sphère concentrique à l'ellipsoïde.]

12. Vérifier, en se servant de l'Exercice n° 9, que les centres de courbure principaux d'un ellipsoïde en un ombilic sont confondus et calculer la valeur commune des rayons de courbure principaux. [La racine double de l'équation de l'Exercice n° 9 est $\lambda = -b^2$.]

13. Vérifier que les ombilics d'un ellipsoïde sont les points où il est percé orthogonalement par son hyperbole focale. Expliquer la raison géométrique de cette propriété. En déduire le lieu des ombilics d'une famille de quadriques homofocales.

14. Toute sphère tangente à un ellipsoïde en un ombilic coupe cette surface suivant un cercle C. Calculer l'équation du plan P de ce cercle, connaissant le centre ω de la sphère. Montrer que P passe par l'ombilic, lorsque ω est au centre de courbure principale.

[Si x_0, 0, z_0 sont les coordonnées de l'ombilic, celles de ω sont de la forme $x_0\left(1+\frac{\rho}{a^2}\right)$, 0, $z_0\left(1+\frac{\rho}{c^2}\right)$. L'équation du plan P est

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{zz_0}{c^2}-\frac{a^2+c^2+2\rho}{a^2-c^2}=0.$$

Lorsque ω est centre de courbure, $\rho=-b^2$; l'équation ci-dessus est vérifiée pour $x=x_0$, $z=z_0$ et réciproquement.]

15. Par une droite fixe D, on mène des plans tangents à des quadriques homofocales. Lieu des normales aux points de contact. (*Cf.* Chap. XXXV, Exercice proposé n° 41.)

16. Soient deux ellipsoïdes homofocaux E et E'. Soit T un plan tangent à E et T', T'' les plans tangents à E' parallèles à T. Démontrer que le produit des distances de T à T' et à T'' demeure constant, quand on fait varier T.

[Prendre les équations tangentielles de E et de E', en supposant

$$u^2+v^2+w^2=1.$$

Le produit considéré est alors égal à

$$r'^2 - r^2 = \lambda' - \lambda.$$]

17. Étant donné un ellipsoïde, on considère les cordes telles que les normales aux extrémités soient dans un même plan. Démontrer qu'elles constituent les normales aux quadriques homofocales à l'ellipsoïde proposé (É. P., 1913). (*Cf.* Chap. XXVII, Exercice proposé n° 14.)

18. Former l'équation générale des sphères bitangentes à une quadrique à centre. (*Cf.* Exercice n° 7.)

19. Soit un ellipsoïde E rapporté à ses axes. A tout point $M(x, y, z)$, on fait correspondre le point $M'(x', y', z')$ défini par les formules

$$x' = x, \qquad y' = \frac{a}{b} y, \qquad z' = \frac{a}{c} z.$$

Quelle surface décrit M' quand M décrit E ? Montrer que deux volumes homologues quelconques sont dans un rapport constant. En déduire le volume de l'ellipsoïde.

(Extension des propriétés du cercle principal de l'ellipse.)

20. Quel est le lieu du point commun aux plans tangents à un ellipsoïde aux extrémités de trois demi-diamètres conjugués ?

21. Une droite se déplace de manière que trois de ses points A, B, C décrivent les faces d'un trièdre trirectangle. Quelle est la surface décrite par tout point M de cette droite invariablement lié à A, B, C ?

(Extension de la génération de l'ellipse par le procédé du n° 340.)

22. Trouver le lieu des points par où l'on peut mener deux plans tangents rectangulaires à un cône du second degré.

23. Étant donnés un hyperboloïde H et une droite D, trouver les plans passant par D qui coupent H suivant une parabole ou suivant une hyperbole équilatère.

24. On établit une correspondance homographique entre deux génératrices de systèmes différents d'un hyperboloïde à une nappe. Quel est le lieu de leur point de rencontre.

[Utiliser les formules (31) du n° 556, en établissant une relation homographique entre u et v.]

25. Dans les formules (31) du n° 556, on suppose $a = b = 1$, $c = i$.

On obtient ainsi les équations paramétriques d'une sphère S de rayon 1. Vérifier que si l'on fait sur x, y, z une substitution orthogonale quelconque (t. I, n° 299), il en résulte séparément sur u et sur $-v$ une même substitution homographique et réciproquement. Interpréter géométriquement ce résultat (Darboux).

[Calculer u' en fonction de u et v. En tenant compte des relations entre les neuf cosinus (n° 35), on vérifie que l'expression obtenue est indépendante de v et, après suppression haut et bas d'un facteur commun linéaire en v, on obtient une fonction homographique de u. On fait ensuite un calcul analogue pour v'.]

26. On reprend les hypothèses précédentes. Calculer

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

en fonction de du et de dv. Vérifier que l'expression obtenue est invariante pour toute substitution homographique effectuée simultanément sur u et sur v. Rapprocher ce résultat du précédent (Darboux).

27. Trouver le lieu des points d'un hyperboloïde à une nappe par où passent deux génératrices rectangulaires.

(Intersection avec la sphère de Monge. Peut s'établir avec les formules du n° 556 ou bien géométriquement.)

28. On considère la ligne de striction S des génératrices (u); (*cf.* Exercice résolu n° 5). Montrer que chaque génératrice (v) la rencontre en trois points. En déduire que S n'est pas une biquadratique.

29. Calculer le paramètre de distribution des génératrices d'un hyperboloïde de révolution.

30. Calculer les équations des génératrices d'un hyperboloïde à une nappe, en prenant pour paramètre de chacune d'elles l'anomalie excentrique, sur l'ellipse de gorge, du point où elle perce le plan des xy. Calculer ensuite les coordonnées d'un point quelconque de la surface en fonction de u et v.

31. Trouver, sur un hyperboloïde de révolution, le lieu des points par où passent deux génératrices faisant un angle donné θ. (E. P., 1913.)

32. Étant donné un hyperboloïde à une nappe H, trouver le lieu A des projections de son centre sur ses génératrices. Montrer qu'il existe une

infinité d'autres hyperboloïdes H′ dont la ligne de striction se déduit de Δ par une transformation de la forme

$$x = \lambda x', \qquad y = \mu y', \qquad z = \nu z'.$$

[La ligne Δ est définie par l'équation (1) de l'Exercice résolu n° 5, où l'on change a en $\frac{1}{a}$, b en $\frac{1}{b}$, et c en $\frac{1}{c}$. Les hyperboloïdes H′ sont définis par la condition

$$\frac{\frac{1}{c'^2} + \frac{2}{b^2} - \frac{1}{a'^2}}{\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{c'^2}} = \frac{c^2 + 2b^2 - a^2}{a^2 + c^2}.$$

33. Reprendre les Exercices 1 à 9 pour un paraboloïde.

34. On reprend les notations du n° 560. Au cercle Γ, on fait correspondre le point M, pôle du plan sécant par rapport au paraboloïde. Démontrer les propriétés suivantes :

1° Pour que deux cercles Γ et Γ′ soient orthogonaux, il faut et il suffit que les points M et M′ correspondants soient conjugués par rapport au paraboloïde.

2° Pour que les deux cercles Γ et Γ′ soient tangents, il faut et il suffit que la droite MM′ soit tangente au paraboloïde. Le point de contact des deux cercles est la projection du point de contact de MM′. Distinguer les contacts extérieur et intérieur de Γ et Γ′.

[Solutions analytique et géométrique. Pour plus de détails sur cette correspondance, *voir* une Note de MM. Sainte-Laguë et J. Haag dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (août 1905).]

35. Reprendre les Exercices 12 à 15 avec des paraboloïdes.

36. Même question pour les Exercices 24 et 27.

37. Chercher la ligne de striction d'un paraboloïde hyperbolique. Cas où le paraboloïde est équilatère. $\left(\text{Section par le plan } \frac{x}{p\sqrt{p}} = \frac{z}{q\sqrt{q}}.\right)$

38. Montrer que le paramètre de distribution d'une génératrice située à la distance d de son plan directeur est égal à $\sqrt{pq} + \frac{d^2}{\sqrt{pq}}$.

39. Étant donné un paraboloïde hyperbolique équilatère, trouver le lieu des points par où passent deux génératrices faisant un angle constant (É. P., 1913). Montrer que ce lieu se trouve sur un hyberboloïde de révolution à deux nappes ayant pour centre le sommet et pour axe l'axe du paraboloïde.

[Partir de l'équation $xy = kz$.]

40. Quel est le lieu des projections d'un point fixe P sur les génératrices d'un paraboloïde hyperbolique équilatère ? (Cubique gauche.)

CHAPITRE XXXVII.

LES CONIQUES CONSIDÉRÉES COMME COURBES UNICURSALES; RAPPORT ANHARMONIQUE, HOMOGRAPHIE.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Déterminer les asymptotes, le centre, les axes, les sommets et les foyers de la conique*

$$x = \frac{t(t+2)}{t-1}, \qquad y = \frac{2t+1}{t-1}. \tag{1}$$

Les asymptotes se déterminent par la méthode générale du n° 230. Les points à l'infini sont donnés par $t = 1$ et $t = \infty$.

Pour $t = 1$, x et y sont infinis, $\frac{y}{x} = \frac{2t+1}{t(t+2)}$ tend vers 1.

$$y - x = \frac{1-t^2}{t-1} = -(1+t)$$

tend vers -2; d'où l'*asymptote*

$$y = x - 2. \tag{2}$$

Pour $t = \infty$, $x = \infty$, $y = 2$; *la deuxième asymptote est*

$$y = 2. \tag{3}$$

Le centre est l'intersection des asymptotes; ses coordonnées sont

$$y = 2, \qquad x = 4.$$

Les axes sont les bissectrices des asymptotes. Leurs coefficients angulaires sont $\tan\frac{\pi}{8} = 0,414$ et $-\cot\frac{\pi}{8} = -2,414$. Leurs équations respectives sont

$$y - 2 = 0,414(x - 4), \tag{4}$$

$$y - 2 = -2,414(x - 4). \tag{5}$$

Parmi *les sommets,* deux seulement sont réels, puisque la courbe est une hyperbole. Pour reconnaître l'axe sur lequel ils se trouvent, prenons un point quelconque de la courbe, par exemple le point $t = 0$, dont les coordonnées sont $x = 0$, $y = -1$. Il se trouve dans l'angle aigu des asymptotes, dont la bissectrice est (4). Cette droite est donc l'axe transverse. Elle coupe l'hyperbole en deux points, dont les t sont donnés par l'équation

$$3 = 0{,}414(t^2 - 2t + 4) = 0{,}414[(t-1)^2 + 3];$$

d'où

$$(t-1) = \pm\sqrt{4{,}25} = \pm 2{,}06.$$

Les deux sommets sont donc :

$$t = 3{,}06; \qquad x = 7{,}51, \qquad y = 3{,}45;$$
$$t = -1{,}06; \qquad x = 0{,}484, \qquad y = 0{,}544.$$

Comme vérification, ils satisfont bien à (4) et leur milieu est bien le centre (4, 2).

Connaissant les sommets et les asymptotes, on pourrait avoir facilement *les foyers.* Indiquons, cependant, le calcul direct. Soient (α, β) les coordonnées d'un foyer. Coupons l'hyperbole par la droite isotrope

$$y - \beta = i(x - \alpha).$$

L'équation aux t des points d'intersection est

$$-it^2 + t[2 - \beta + i(\alpha - 2)] + 1 + \beta - i\alpha = 0.$$

Écrivons qu'elle a une racine double :

$$[2 - \beta + i(\alpha - 2)]^2 + 4i(1 + \beta - i\alpha) = 0.$$

En annulant le coefficient de i et les termes réels, on obtient les équations des hyperboles focales (*cf.* Chap. XXXIV, Exercice résolu n° 1), dont l'intersection détermine les quatre foyers. Comme nous connaissons déjà l'axe focal, prenons seulement la première de ces hyperboles, soit

$$(2 - \beta)(\alpha - 2) + 2(1 + \beta) = 0$$

et coupons-la par (4). Si l'on pose $\alpha - 4 = \xi$, on obtient

$$\xi^2 = \frac{6}{0{,}414}, \qquad \xi = \pm 3{,}81, \qquad \eta = \beta - 2 = 0{,}414\xi = \pm 1{,}58.$$

Finalement, les coordonnées des deux foyers sont

$$(7,81\,;\,3,58) \quad \text{et} \quad (0,19\,;\,0,42).$$

2. *Soient une conique* S *et un point* P *sur cette conique. On considère deux cordes* MM′ *et* NN′ *telles que* $\left(\widehat{PM, PM'}\right) = \left(\widehat{PN, PN'}\right)$. *Démontrer que les droites* MN′ *et* M′N *se coupent sur la polaire du point de Frégier relatif au point* P.

Considérons les deux faisceaux homographiques obtenus en faisant tourner l'angle $\widehat{MPM'}$ autour de son sommet. Les droites PM, PM′ et PN, PN′ en constituent deux couples de rayons homologues. Considérons maintenant les divisions homographiques déterminées par ces faisceaux sur la conique S; M, M′ et N, N′ en sont deux couples de points homologues. D'après le théorème II du n° 566, les droites MN′ et M′N se coupent en un point Q situé sur la ligne des points doubles EF. Or, les rayons doubles des faisceaux ci-dessus considérés sont les droites isotropes du point P. Ce sont aussi les rayons doubles de l'involution déterminée par les angles droits de sommet P. Dès lors, le point de Frégier R relatif à P se trouve à la fois sur la tangente en E et sur la tangente en F. Par suite, la droite EF est la polaire de ce point. C. Q. F. D.

Autre démonstration. — Les angles $\widehat{MPM'}$ et $\widehat{N'PN}$ peuvent être considérés comme symétriques l'un de l'autre par rapport à deux droites rectangulaires PA et PB, bissectrices communes des angles $\widehat{MPN'}$ et $\widehat{M'PN}$. Les rayons PM, PN′ et PM′, PN sont des couples de rayons homologues de l'involution qui admet pour rayons doubles PA et PB. Dès lors, les droites MN′, M′N, la tangente en A et la tangente en B sont quatre droites concourantes (n° 567). Leur point de concours Q est le pôle de AB. Mais, l'angle $\widehat{APB}$ étant droit, la droite AB passe par le point de Frégier R. Par suite, Q se trouve sur la polaire de ce point (n° 435). C. Q. F. D.

Remarque. — La droite EF et la tangente PT en P constituent un couple de sécantes communes à S et au cercle de rayon nul de centre P. Elles sont donc *également inclinées sur les axes de* S.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Déterminer les éléments des coniques :

$$x = \frac{t+2}{t^2+2}, \qquad y = \frac{t^2-1}{t^2+2};$$

$$x = \frac{2t-3}{t^2-1}, \qquad y = \frac{t^2+2t}{t^2-1};$$

$$x = \frac{1+t}{(t-1)^2}, \qquad y = \frac{2-t^2}{(t-1)^2};$$

$$x = t^2+3t, \qquad y = 2t^2-t.$$

Calculer l'équation du cercle osculateur à l'ellipse ci-dessus au point $t = 0$.

2. Montrer que le rapport anharmonique de quatre points d'un cercle égale le rapport anharmonique des quatre valeurs correspondantes de $\tan\frac{\varphi}{2}$, φ désignant l'angle polaire du rayon.

3. Soient une parabole H, P un de ses points et PM, PM′ deux cordes quelconques issues de P. Soient N et N′ les points de contact des tangentes parallèles respectivement à PM et à PM′. Montrer que les cordes MN′ et M′N se coupent sur le diamètre du point P.

(Appliquer le théorème II du n° 566.)

4. Soient une conique S, un point P sur cette conique et une droite Δ. Sur Δ, on prend deux vecteurs équipollents $\overrightarrow{mm'}$ et $\overrightarrow{nn'}$. On projette les quatre points m, m', n, n' sur la conique, à partir de P, en M, M′, N, N′. Démontrer que les cordes MN′ et M′N se coupent sur la tangente à la conique en son point de rencontre E avec la parallèle à Δ menée par P.

[Théorème II du n° 566; les rayons doubles sont confondus suivant PE. On peut aussi envisager une involution, en considérant les points n', n comme symétriques de m, m' (*cf.* Exercice résolu n° 2).]

5. Que deviennent les théorèmes I à IV du n° 566, quand les points doubles A et C sont les points cycliques?

6. Gardant les notations de l'Exercice n° 3, quelle est l'enveloppe de la droite MN quand M décrit la parabole?

7. Gardant les notations de l'Exercice n° 4, quelle est l'enveloppe de la corde MM′ quand mm' glisse sur Δ?

8. Trouver le lieu des sommets des angles de grandeur constante circonscrits à une parabole. [*Cf.* Exercice proposé n° 32 du Chapitre XXXV. Il y a correspondance homographique entre les côtés de l'angle; les tangentes doubles sont les tangentes isotropes.]

9. L'enveloppe des cordes d'une conique S vues d'un de ses points P sous un angle constant est une autre conique S′. Montrer que toute droite passant par le point de Frégier relatif à P et à S a même pôle par rapport à S et à S′.

(S et S′ sont bitangentes, le pôle de contact étant le point de Frégier.)

10. On donne une ellipse E et deux droites D et D′ parallèles au petit axe et équidistantes de cet axe. Une tangente variable rencontre ces droites en A et A′. Trouver le lieu du point de rencontre des deux autres tangentes issues de A et de A′. (É. P., 1913.)

11. Soit une ellipse E, d'axes Ox et Oy. Soient P un point quelconque de cette ellipse et Q son point de Frégier. Démontrer les propriétés suivantes :

1° Les droites OP et OQ admettent Ox et Oy pour bissectrices;

2° Le lieu du point Q est une ellipse homothétique et concentrique à E;

3° Si l'on considère deux points P et P′ de E et les points Q et Q′ correspondants, les droites PP′ et QQ′ sont également inclinées sur les axes.

[Solutions analytique et géométrique. — Prendre, en particulier, comme angle droit de sommet P, l'angle formé par les parallèles aux axes. Si A et B sont les points de rencontre de la normale avec Ox et Oy, la figure PQAB reste semblable à elle-même (*cf.* Chap. XXXV, Exercice proposé n° 2); on en déduit que $\frac{OQ}{OP} = \text{const.}$]

12. On détermine une involution sur une conique par deux couples de points homologues. Construire l'homologue d'un point quelconque, ainsi que les points doubles.

(S'appuyer sur le théorème V du n° 567.)

13. Soit une conique S et une droite fixe Δ tangente à cette conique.

Sur Δ, on prend deux points fixes I et J et deux points variables A et B conjugués harmoniques par rapport à IJ. Trouver le lieu du point de rencontre des tangentes à S menées par A et B. Cas où I et J sont les points cycliques.

14. On considère l'hyperbole équilatère $xy = 1$ et les six points de cette courbe ayant pour abscisses 0, a, ∞, b, c, d. Démontrer que la droite de Pascal de l'hexagone défini par ces six points a pour équation

$$(by - 1)(d - a)c = (a - b)(x - d).$$

(E. P., 1913.)

15. Examiner les cas particuliers des théorèmes de Pascal et de Brianchon obtenus en supposant que des sommets (ou côtés) consécutifs viennent se confondre.

16. On donne une conique par cinq points : 1, 2, 3, 4, 5. Appliquer le théorème de Pascal à la construction du deuxième point de rencontre avec une droite quelconque 1λ passant par 1. Construire également la tangente au point 1.

(Pour la tangente, confondre les points 6 et 1.)

17. Quelle est l'enveloppe des cordes d'une conique vues d'un point fixe P sous un angle droit? Cas où P est un foyer de la conique. (Théorème VI du n° 567.)

18. Quel est le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une conique? (Théorème corrélatif du théorème VI du n° 567.)

19. Soient deux coniques S et S′. On prend un point P_1 sur S; par ce point, on mène une tangente à S′, qui rencontre de nouveau S en P_2; par P_2, on mène une tangente à S′, qui rencontre de nouveau S en P_3, et ainsi de suite jusqu'au point P_n.

Montrer que, lorsque P_1 décrit S, la droite P_1P_n enveloppe une conique Γ, tangente aux tangentes communes à S et à S′. Si, pour une position particulière de P_1, la droite P_1P_n est tangente à S′, il en est de même pour toutes les positions de P_1.

[La correspondance entre P_1 et P_n est biquadratique et involutive. Les quatre points doubles sont les points de contact des tangentes communes. S'il y a un autre point double, il y en a une infinité.]

CHAPITRE XXXVIII.

COURBES ET SURFACES DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME DEGRÉ.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Soient une cyclique* S *et trois cercles bitangents* C_1, C_2, C_3 *appartenant à la même famille. D'un point* M *de* S, *on mène les tangentes à ces trois cercles; soient* t_1, t_2, t_3 *leurs longueurs. Montrer que, lorsque* M *décrit* S, *elles satisfont à une relation linéaire et homogène*

$$at_1 + bt_2 + ct_3 = 0. \qquad \text{(Darboux.)}$$

L'équation générale des cercles C d'une même famille peut toujours se mettre sous la forme

$$\lambda^2 X + \lambda Y + Z = 0, \tag{2}$$

où X, Y, Z désignent des premiers membres d'équations de cercles fixes et λ un paramètre variable. La cyclique étant l'enveloppe des cercles C, son équation s'écrit

$$Y^2 - 4ZX = 0. \tag{3}$$

Si l'on regarde X, Y, Z comme des coordonnées homogènes, cette équation représente une conique γ, enveloppe des droites (2). Or, prenons un triangle de référence formé par trois de ces droites (λ_1), (λ_2), (λ_3). L'équation de γ prend la forme (Chap. XXXIII, Exercice proposé n° 33)

$$a\sqrt{X} + b\sqrt{Y} + c\sqrt{Z} = 0, \tag{4}$$

avec

$$\begin{cases} X = \lambda_1^2 X - \lambda_1 Y + Z, \\ Y = \lambda_2^2 X - \lambda_2 Y + Z, \\ Z = \lambda_3^2 X - \lambda_3 Y + Z. \end{cases} \tag{5}$$

Mais, si l'on remplace X, Y, Z par leurs expressions en fonction des

coordonnées x, y, X', Y' et Z' sont les premiers membres des équations des cercles C_1, C_2, C_3, de paramètres respectifs λ_1, λ_2, λ_3. Ces premiers membres sont, d'autre part, égaux aux puissances de $M(x, y)$ par rapport à ces cercles, à des facteurs constants près, qu'on peut faire rentrer dans les coefficients a, b, c de (4). Comme ces puissances sont égales aux carrés des tangentes issues de M, on voit que l'équation (4), qui est une forme de l'équation de la cyclique, est la traduction analytique de la relation (1) qu'il s'agissait de démontrer.

Remarques. — I. Cette propriété des cycliques est une généralisation de la propriété des cercles focaux d'une conique (n° 538).

II. Supposons que *le cercle* C_3 *se réduise à la droite de l'infini*, c'est-à-dire que Z' se réduise à une constante. La relation (1) devient alors

$$at_1 + bt_2 + c = 0. \tag{6}$$

III. Si l'on prend, pour un ou plusieurs des cercles C_i, des foyers, les quantités t_i deviennent les distances MF_i. Dans le cas particulier où les cercles C comprennent la droite de l'infini, si l'on prend pour C_1 et C_2 deux foyers F_1 et F_2 de la même famille, la relation (6) devient

$$a\,MF_1 + b\,MF_2 + c = 0. \tag{7}$$

La courbe est appelée *ovale de Descartes*.

2. *Étudier la cyclique sphérique* S *définie par l'intersection d'une sphère* Σ *et d'une quadrique* Q (Darboux).

La courbe S est une biquadratique, caractérisée par la condition de s'appuyer en quatre points 1, 2, 3, 4 sur le cercle de l'infini. Toutes les quadriques qui la contiennent ont mêmes plans cycliques et mêmes axes, les traces de ces plans et de ces axes sur le plan de l'infini étant les sécantes communes et les pôles doubles déduits des points de base 1, 2, 3, 4.

I. Cherchons les *sphères bitangentes*. Une telle sphère σ coupe Σ suivant un cercle C bitangent et dont le plan P est également bitangent. Réciproquement, tout plan bitangent coupe Σ suivant un cercle bitangent et toute sphère passant par ce cercle est bitangente. Or, les plans bitangents se répartissent en quatre familles, les plans de chaque famille étant tangents à un des quatre cônes du faisceau (n° 491). Soient P l'un de

ces cônes et P l'un de ses plans tangents. Le lieu des centres des sphères σ passant par l'intersection C de P et de Σ est la perpendiculaire Oλ à P menée par le centre O de Σ. Quand P varie en restant tangent au cône Γ, Oλ décrit un cône γ supplémentaire de Γ.

Soient A le sommet de Γ et AG la génératrice de contact du plan P. Cette génératrice rencontre S aux deux points de contact M, M′ avec les sphères σ. La puissance de A par rapport à σ est $\overline{AM}\cdot\overline{AM'}$; elle est égale à la puissance de A par rapport à Σ. Dès lors, considérons la sphère α, de centre A et orthogonale à Σ. Toutes les sphères σ sont orthogonales à α.

Résumons les résultats que nous venons d'obtenir :

Il y a quatre familles de sphères σ bitangentes à S. *Dans chaque famille, le lieu des centres est un cône du second degré γ, de sommet* O, *que nous appellerons* CÔNE DÉFÉRENT. *En outre, les sphères σ sont orthogonales à une sphère fixe α, que nous appellerons sphère directrice.*

Les quatre cônes déférents sont homofocaux, car ils sont supplémentaires de cônes homocycliques (¹). Les centres des quatre sphères directrices sont les sommets du tétraèdre conjugué commun à toutes les quadriques passant par S. Si l'on considère deux d'entre eux, A_1 et A_2, ils sont, en particulier, conjugués par rapport à Σ; donc, les sphères α_1 et α_2 sont orthogonales (n° 190). Autrement dit, *les quatre sphères directrices sont orthogonales deux à deux*.

II. Toute sphère σ passant par le cercle C, intersection de Σ et de P, a une équation de la forme

$$\Sigma + \lambda P = 0.$$

Tout point μ de Σ a pour puissance par rapport à σ le résultat de substitution de ses coordonnées dans λP, c'est-à-dire une quantité proportionnelle à la distance d de μ au plan P.

Cela posé, considérons trois sphères bitangentes σ, σ', σ'', d'une même famille et correspondant à des plans P, P′, P″ différents. Ces plans étant tangents au cône Γ, les distances de tout point μ de ce cône à ces plans

(¹) Leurs traces sur le plan de l'infini sont tangentes aux tangentes au cercle de l'infini aux points 1, 2, 3, 4. Les traces de leurs foyers sont les ombilics déduits de ces quatre tangentes (*cf.* Chap. XXXIV, Exercice proposé n° 19).

sont liées par une relation de la forme

$$a\sqrt{d} + b\sqrt{d'} + c\sqrt{d''} = 0, \tag{1}$$

a, b, c étant des coefficients constants (¹).

Si le point μ est sur S, il est à la fois sur Γ et sur Σ. Chacune des distances d, d', d'' peut être remplacée par la puissance de μ par rapport à σ, σ' ou σ'', à un facteur constant près, qu'on peut faire rentrer dans a, b ou c. Dès lors, désignons par t, t', t'' les longueurs des tangentes à σ, σ', σ'' issues de μ. On a, entre ces longueurs, une relation de la forme

$$at + bt' + ct'' = 0. \tag{2}$$

III. Cherchons *les foyers de* S, c'est-à-dire les centres des sphères σ de rayon nul. Ces centres sont à la fois sur le cône déférent γ et sur la sphère directrice α. Leur lieu est donc la cyclique s, intersection de γ et de α. Autrement dit, *la cyclique* S *admet pour focales quatre cycliques*, telles que s.

Il est à remarquer que S *est, inversement, une focale de* s, car la relation entre les deux cônes Γ, γ, ainsi qu'entre les deux sphères Σ, α, est réciproque.

3. *Démontrer que toute surface non réglée du troisième degré possède* 27 *droites.*

Pour qu'une droite D soit sur une surface du troisième degré, il faut et il suffit qu'elle y ait quatre points. En exprimant ceci pour la droite la plus générale de l'espace, on obtient quatre équations algébriques entre les quatre paramètres dont dépend cette droite. Donc, en général, une surface du troisième degré possède un nombre limité de droites.

Pour évaluer ce nombre, imaginons qu'on possède une de ces droites D_1 et, pour simplifier, supposons-la à l'infini dans le plan des xy (²). L'équation de la surface est alors de la forme

$$\begin{aligned} &z(a x^2 + a' y^2 + a'' z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy) \\ &\quad + \mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 \\ &\quad + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'zx + 2\mathrm{B}''xy + 2\mathrm{C}x + 2\mathrm{C}'y + 2\mathrm{C}''z + \mathrm{D} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

(¹) L'équation (1) n'est autre que l'équation du cône rapporté aux plans P, P', P'' (*cf.* Chap. XXXIII, Exercice proposé n° 33).

(²) On peut toujours se ramener à cette hypothèse par une transformation homographique convenable (n° 402).

La section par le plan P parallèle à xOy et de cote z comprend la droite D_1 et une conique C, dont l'équation est l'équation (1), quand on y regarde z comme constant. Écrivons que cette conique se décompose :

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} A + az & B'' + b''z & C + B'z + b'z^2 \\ B'' + b''z & A' + a'z & C' + Bz + bz^2 \\ C + B'z + b'z^2 & C' + Bz + bz^2 & D + 2C''z + A''z^2 + a''z^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous obtenons une équation du cinquième degré en z. Donc, *par la droite* D_1 *passent cinq plans qui coupent chacun la surface suivant trois droites.*

Prenons un quelconque d'entre eux P. Il coupe suivant trois droites D_1, D_2, D_3, à chacune desquelles nous pouvons appliquer le résultat précédent. Voyons combien cela va nous donner de droites en tout. Si nous écartons le plan P, il reste quatre plans passant par D_1 et coupant chacun suivant deux droites autres que D_1. Cela nous donne 8 droites autres que D_1, D_2, D_3. Les plans passant par D_2 et par D_3 nous donnent, de même, 16 autres droites (1). Nous avons donc, en tout, 24 droites nouvelles. En y ajoutant les trois premières, cela nous en fait 27. Il ne peut, d'ailleurs, y en avoir d'autres, car toute droite tracée sur la surface perce le plan P en un point qui appartient nécessairement à l'une des droites D_1, D_2, D_3. Finalement, le théorème est démontré.

Remarque. — Il y a, sur la surface, 27 *familles de coniques*, obtenues en coupant par les plans passant par une des 27 droites. Chacun de ces plans est *bitangent*, les points de contact étant les points de rencontre de la droite et de la conique. Dans chaque famille, il y a 5 plans *tritangents*. Le nombre total de ces plans est $\frac{27 \times 5}{3} = 45$, car chaque plan est obtenu trois fois.

4. *Toute sphère* S *bitangente à un tore le coupe suivant deux cercles* C *et* C'. *Montrer que l'angle de ces deux cercles est constant.*

Soit P un des points de rencontre de la sphère S avec l'axe du tore. Faisons une inversion de centre P et ayant pour puissance la puissance

(1) Ces droites sont nouvelles, car si une droite s'appuyant sur D_2 avait déjà été obtenue comme s'appuyant sur D_1, elle serait dans le plan P. Ceci est toutefois en défaut, si la droite passe par le point de rencontre O de D_1 et de D_2. Ce point est alors un point double et il n'y a que 21 droites (*cf.* Exercices proposés n^os^ 26 et 27). Pour être général, l'énoncé ci-dessus doit compter deux fois toute droite passant par un point double.

de P par rapport aux cercles méridiens. Le tore se transforme en lui-même. La sphère S devient un plan bitangent et les cercles C et C′ les cercles de Villarceau de ce plan. L'angle des deux premiers est égal à l'angle des seconds. Or, celui-ci est évidemment constant.

Remarque. — La même propriété a lieu pour une cyclide de Dupin, car celle-ci peut se transformer en un tore par une inversion convenable. (*Cf.* Exercice proposé n° 54.)

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Étendre aux courbes de degré $m > 3$ les considérations du n° 569. Montrer que les courbes de degré m qui passent par $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ points fixes passent par $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ autres points fixes.

2. Soit une courbe C du quatrième degré. Une conique Γ la coupe en huit points : 1, 2, ..., 8. Chacune des quatre droites 12, 34, 56, 78 la coupe en deux autres points. Montrer que les huit nouveaux points ainsi obtenus sont sur une même conique. Cas où Γ est une droite double.

3. Les asymptotes d'une courbe du quatrième degré coupent la courbe en huit points à distance finie situés sur une même conique.

4. Soit la cubique

$$xy(x+y+a) - \frac{a^3}{3} + a - 1 = 0.$$

1° Montrer que ses points à l'infini sont des points d'inflexion.

2° Chercher ses autres points d'inflexion. Montrer qu'ils peuvent être définis par le système

$$x+y = -a+z, \qquad xy = \frac{b}{z},$$

où z doit être successivement remplacé par 1,

$$z_1 = \frac{a}{3} + j\left(1 - \frac{a}{3}\right) \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{a}{3} + j^2\left(1 - \frac{a}{3}\right),$$

j désignant une racine cubique imaginaire de l'unité. A $z = 1$, correspondent les points

$$(x_4 = -z_1,\ y_4 = -z_2) \qquad \text{et} \qquad (x_5 = -z_2,\ y_5 = -z_1);$$

A $z = z_1$, correspondent

$$(x_6 = -1,\ y_6 = -z_2) \qquad \text{et} \qquad (x_7 = -z_2,\ y_7 = -1);$$

Enfin, à $z = z_2$, correspondent

$$(x_8 = -1,\ y_8 = -z_1) \qquad \text{et} \qquad (x_9 = -z_1,\ y_9 = -1).$$

3° Chercher les douze droites qui coupent la cubique suivant trois points d'inflexion et vérifier toutes les propriétés de l'Exercice proposé n° 5 du Chapitre IX.

4° Montrer qu'une cubique réelle n'a que trois points d'inflexion réels.

5° Étudier le cas particulier où $a = 3$. Montrer que la cubique possède alors un point double et seulement trois points d'inflexion.

5. En adoptant les notations du n° 570, montrer que tout point M qui divise le segment M_1M_2 dans un rapport constant décrit une cubique circulaire à point double.

6. On donne une cubique circulaire C, de point double O et une droite D parallèle à l'asymptote de cette cubique. On mène la sécante variable $O\lambda$, qui rencontre C en M et D en N. On porte $\overline{OP} = \overline{MN}$. Le lieu de P est une cubique C′ analogue à C, dont on déterminera l'asymptote et le cercle générateur en fonction des mêmes éléments de C.

7. On reprend les notations du n° 570 et l'on demande de démontrer que la tangente en M à C et la tangente en M_1 à Γ rencontrent Δ en deux points de milieu M_2.

[Considérer la sécante voisine $OM'M_1'M_2'$ et appliquer au triangle OM_2M_2' la propriété de l'Exercice proposé n° 11 *bis* du Chapitre VI.]

8. Soient une droite fixe D, un point fixe O sur cette droite et un point fixe A en dehors. Par A, on mène une droite variable $A\lambda$, qui rencontre D en P. Sur cette droite, on porte $PM = PM' = PO$. Le lieu des points M et M′ est une strophoïde.

9. Reprendre la discussion du n° 573, en supposant que la quartique admet Ox et Oy pour axes de symétrie.

10. En adoptant les notations du n° 573, montrer que la condition $A = B$ est nécessaire et suffisante pour que les points cycliques soient des points de rebroussement. Par une rotation des axes, on peut annuler l'un des coefficients C et D. Les déférentes sont des cercles concentriques. Il y a

en outre une famille de cercles bitangents dont les centres sont en ligne droite et qui comprend trois foyers F_1, F_2, F_3. Cette famille comprend aussi la droite de l'infini, de sorte que la cyclique est une *ovale de Descartes*. (*Cf.* Exercice résolu n° 1, Remarque III.)

11. Démontrer que le triangle conjugué commun à une déférente et au cercle directeur correspondant a pour sommets les centres des trois autres cercles directeurs.

12. Reprendre toute la théorie des n^{os} 571 à 575 pour une cubique circulaire.

[Prendre Oy parallèle à l'asymptote réelle. Puis, par un changement d'origine, faire disparaître les termes en xy et en y^2, ce qui donne une équation de la forme

$$x(x^2+y^2)+Ax^2+2Cx+2Dy+E=0. \tag{1}$$

Les cercles bitangents s'obtiennent par la méthode du n° 573. Mais il n'y a pas intérêt à garder la variable P, à cause de la dissymétrie en x, y. Tirer y de la deuxième équation dérivée et porter dans les deux autres. En écrivant que les équations en x obtenues sont des identités, on obtient

$$\lambda^4+A\lambda^3+2C\lambda^2+\lambda E-D^2=0, \tag{2}$$

$$\beta^2-2\lambda\alpha-\lambda(A+\lambda)=0. \tag{3}$$

$$2(\alpha\lambda^2-\beta D)-\gamma\lambda+2\lambda(\lambda^2+A\lambda+C)=0; \tag{4}$$

d'où quatre familles. Les déférentes sont les paraboles homofocales (3). Le cercle directeur Γ_λ est donné par (4) et a pour équation

$$x^2+y^2-2\lambda x+2\frac{D}{\lambda}y-2(\lambda^2+A\lambda+C)=0. \tag{5}$$

Pour démontrer l'orthogonalité de Γ_{λ_1} et Γ_{λ_2}, diviser au préalable (2) par λ et retrancher comme au n° 573.

Enfin, on examinera, comme pour les quartiques, les cas où il y a des symétries et le cas du point double.]

13. Les tangentes à une cyclique S aux points cycliques sont les tangentes isotropes communes aux quatre déférentes. Les foyers singuliers (n° 514) de la cyclique sont les foyers ordinaires des déférentes (Darboux).

[Partir de la construction des points de contact d'un cercle C bitangent (n° 277). Si l'un de ces points est I, la tangente MT en M à la déférente,

qui est perpendiculaire à OI, est MI. C'est aussi la tangente en I à C, donc à S.]

14. Pour qu'une cyclique admette les points cycliques comme points de rebroussement, il faut et il suffit que les déférentes soient des cercles concentriques. (*Cf.* Exercice n° 10.)

15. Démontrer, en s'appuyant sur l'Exercice n° 11, que si un cercle directeur Γ_1, de centre O_1, a son rayon nul, les centres O_2 et O_3 des deux autres cercles directeurs sont les pieds des bissectrices de l'angle O_1 du triangle qui a pour sommets O_1 et les points de contact des tangentes menées de ce point à la déférente D_1. Montrer, en outre, que Γ_2 et D_2 sont tangents en O_1 à O_1O_3 et que Γ_3 et D_3 sont tangents en O_1 à O_1O_2 (*cf.* n° 376).

16. Toute ovale de Descartes à point double est un limaçon de Pascal (*cf.* Exercice n° 10). Que donnent, dans ce cas particulier, les résultats de l'Exercice précédent ? Cas de la cardioïde.

17. On adopte les notations du n° 578. Chercher le foyer F du limaçon situé sur Ox et autre que O et vérifier que, pour tout point M du limaçon, on a

$$R.MO = a.MF = \frac{R^2 - a^2}{2}.$$

18. Sur l'axe Ox du limaçon précédent, se trouve un centre d'anallagmatie P autre que O :

1° Démontrer que tout cercle C tangent en O à Ox coupe le limaçon en deux points homologues M et M'.

2° Les tangentes en M et M' au limaçon se coupent en un point T du cercle C.

3° Le lieu de T est une cissoïde, admettant O pour point de rebroussement.

[Solutions analytique et géométrique. — Le cercle directeur F de centre P et le cercle déférent D, de centre Q, sont tangents en O à Oy. Le cercle C passe par le centre ω du cercle bitangent en M et M'. Le point T est, sur C, diamétralement opposé à ω. La droite OT rencontre D en B et la tangente à D parallèle à Oy en C tels que $\overline{OT} = \overline{CB}$.]

19. Un angle de grandeur constante se déplace de manière que ses côtés restent tangents à deux cercles. Montrer que son sommet décrit un limaçon de Pascal.

[Introduire l'angle parallèle dont les côtés passent par les centres des cercles. La droite joignant les deux sommets M et M′ passe par un point fixe, pôle du limaçon; de plus, la longueur MM′ est constante.]

20. Étant donnés deux points fixes F et F′, le lieu des points M tels que $MF.MF' = k^2$ est une cyclique appelée *ovale de Cassini*. Étudier ses différentes formes, quand on fait varier la constante k. Montrer que ses déférentes sont deux coniques de foyers F et F′ et que chaque cercle directeur est le cercle de Monge de la déférente correspondante. Sur l'axe FF′, il y a deux autres foyers φ et φ'. Montrer que l'on a

$$M\varphi . M\varphi' = \frac{k^2}{c^2}\overline{MO}^2,$$

O désignant le milieu de FF′ et $2c$ la distance FF′. Lorsque $k = c$, la courbe est une *lemniscate de Bernoulli*.

21. Toute cubique circulaire à point double est une podaire de parabole et réciproquement. Dans quelles conditions cette podaire est-elle une cissoïde ou une strophoïde ?

22. Chercher les foyers d'une strophoïde droite et d'une cissoïde droite.

23. On considère une cyclique sphérique S déterminée par l'intersection de la sphère Σ et d'une quadrique concentrique Q. Examiner ce que deviennent, dans ce cas particulier, les résultats généraux de l'Exercice résolu n° 2. Démontrer la propriété suivante : Soient deux cercles bitangents C et C′ de la même famille; d'un point M de S, on mène, sur Σ, les arcs de grands cercles MT et MT′ tangents à C en T et à C′ en T′; quand M décrit S, on a $\widehat{MT} \pm \widehat{MT'} = \text{const.}$

[Trois des quatre cônes F sont des cylindres. Trois des cônes déférents sont les plans de symétrie de S; il en est de même des sphères directrices correspondantes. Les focales sont des cycliques planes.

Pour démontrer la propriété énoncée ci-dessus, introduire les cercles C″ et C‴ symétriques de C et C′ par rapport à O, ainsi que les sphères σ, σ', σ'', σ''' passant par ces cercles et orthogonales à Σ. Appliquer la relation (2) de l'Exercice résolu n° 2 aux sphères σ, σ', σ''' d'une part et σ'', σ', σ''' d'autre part. Si φ et φ' désignent les angles au centre correspondant aux arcs MT et MT′, on a : $t = 2\sin\frac{\varphi}{2}$, $t' = 2\sin\frac{\varphi'}{2}$, $t'' = 2\cos\frac{\varphi}{2}$, $t''' = 2\cos\frac{\varphi'}{2}$.

On a donc deux relations de la forme

$$\sin\frac{\varphi}{2}=a\sin\frac{\varphi'}{2}+b\cos\frac{\varphi'}{2},\qquad \cos\frac{\varphi}{2}=a'\sin\frac{\varphi'}{2}+b'\cos\frac{\varphi'}{2};$$

d'où l'on déduit aisément $\varphi\pm\varphi'=\text{const.}$

Dans le cas particulier où C et C′ ont des rayons nuls, on a une généralisation sphérique de la définition élémentaire de l'ellipse et de l'hyperbole. D'où le nom de *coniques sphériques* donné aux cycliques telles que S.]

24. Transformer par inversion les propriétés des cycliques sphériques, en prenant le pôle sur la sphère Σ. Montrer que si le pôle est, en même temps, un foyer de S, la transformée est une ovale de Descartes.

25. Chercher les 27 droites et les 45 plans tritangents de la surface

$$2xyz+x^2+y^2+z^2+2\sqrt{2}yz+4zx+2\sqrt{2}z=0.$$

[Les 27 droites sont réelles. Elles sont dans le plan de l'infini et dans les plans $z=0$, $2\sqrt{2}z+1=0$; $x=\pm\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-1:y=\pm1:-2\pm\sqrt{2}$.]

26. Si une surface du troisième degré passe par les axes de coordonnées, son équation est de la forme

$$\lambda xyz+yz(By+Cz)+zx(A'x+C'z)+xy(A''x+B''y)+ayz+bzx+cxy=0.$$

L'origine est point double. Le cône des tangentes en ce point coupe la surface suivant 6 droites. Les 15 plans déterminés par ces droites associées deux à deux donnent chacun une nouvelle droite. Montrer qu'il n'y en a pas d'autres.

[Le plan passant par O et par une droite ne passant pas par O coupe suivant une conique admettant O pour point double.]

27. Chercher les 21 droites de la surface

$$12xyz+yz(y-3z)+zx(-5x+3z)-xy(-5x+y)+12z+3x-xy=0.$$

Vérifier que les 15 droites qui ne passent pas par O sont telles que chacune d'elles en rencontre 6 autres. En déduire qu'il y a 15 plans tritangents ne passant pas par O et trouver les équations de ces plans.

[Toutes les droites sont réelles. Les 6 droites issues de O sont les axes et les suivantes :

$$D_1(y-z=0,\ y+2x=0);\qquad D_2(y-2z=0,\ y-x=0);$$
$$D_3(2y+3z=0,\ 5x-3z=0).$$

Chacune des 15 droites donne 6 plans tritangents; mais, chaque plan est obtenu 6 fois.]

28. Démontrer que toute surface réglée du troisième degré est unicursale et que toute section plane d'une telle surface est unicursale.

(*Cf.* Chap. XXVI, Exercice proposé n° 7, en prenant une conique de la surface pour courbe unicursale.)

29. Toute surface réglée du troisième degré possède une droite double, lieu du point double de la section par un plan quelconque. Si on la prend pour axe des z, l'équation de la surface s'écrit

$$\varphi_3(x,y)+z\varphi_2(x,y)+\psi_2(x,y)=0,$$

φ_3, φ_2, ψ_2 étant des polynomes homogènes de degré égal à leur indice. Tout plan passant par Oz coupe la surface suivant une génératrice G. Par tout point P de Oz passent deux génératrices G et G'. Les plans GPz et G'Pz décrivent deux faisceaux en involution. Le plan GPG' coupe la surface suivant une troisième droite Δ, ne rencontrant pas Oz et qui reste fixe quand P varie. On fait une transformation homographique telle que Δ devienne la droite de l'infini du plan des xy, que les plans GPz et G'Pz soient isotropes quand P est à l'infini et enfin que les plans doubles de l'involution précédente soient zOx et zOy. Montrer que la surface devient un conoïde de Plücker.

[La droite Δ est fixe, car s'il y en avait une autre Δ', toute droite s'appuyant sur Oz, Δ et Δ' serait sur la surface, comme y ayant quatre points. La surface comprendrait une quadrique. Si Δ est à l'infini dans xOy, $\varphi_3\equiv 0$.]

30. Ce qui précède est en défaut, lorsque φ_2 et ψ_2 ont un facteur commun. En annulant ce facteur, on obtient un plan H tangent à la surface le long de Oz et que nous prenons pour zOy. Par tout point P de Oz, passe une génératrice G et une seule. Il y a correspondance homographique entre P et le plan zPG. Par une transformation homographique, on peut supposer que le point P homologue de H est à l'infini. L'équation de la surface est alors de la forme

$$x(zx+\varphi_1)+\varphi_3=0. \qquad (1)$$

Le cône des directions asymptotiques admet une génératrice inflexionnelle, non située dans zOx, si la surface ne se décompose pas. Prendre cette génératrice pour axe des x, le plan tangent d'inflexion pour xOy et enfin déplacer l'origine en l'amenant au point P correspondant à zOx. L'équation de la surface prend la forme réduite :

$$x(zx + y) + y^3 = 0. \tag{2}$$

Démontrer que la surface peut être engendrée de la manière suivante : Un paraboloïde hyperbolique A admet Ox et Oz pour génératrices et Oy pour diamètre. Une parabole B admet Ox pour diamètre et Oy pour tangente en O. Le plan tangent à A en un point M de Oz rencontre B en N. La surface est le lieu de la droite MN, quand M décrit Oz.

31. Démontrer que la surface

$$(y - xz)(x^2 - y^2) = (a^2 - z^2)y + 2axz$$

est engendrée par une droite s'appuyant sur Oz. (É. P., 1913.)

[La droite double a pour équations : $x = -a$, $y = z$.]

32. Étudier les lignes $a = \text{const.}$ du conoïde de Plücker (n° 581

33. Calculer le paramètre de distribution d'une génératrice quelconque du conoïde de Plücker.

34. Chercher les lignes asymptotiques du conoïde de Plücker. (*Cf.* Chap. XXVI, Exercice proposé n° 8.)

35. Même question pour la surface (2) de l'Exercice 30.

36. Trouver le lieu des projections d'un point fixe sur les génératrices du conoïde de Plücker.

37. Chercher les lignes d'ombre du conoïde de Plücker.

[Elles se projettent sur xOy suivant des quartiques circulaires à point triple.]

38. Toute cyclide est coupée par une sphère suivant une cyclique.

39. Sur une cyclide, il existe 10 familles de cercles. Les axes de ces cercles sont les génératrices des 5 quadriques déférentes. Les plans de ces cercles, qui sont des plans bitangents, enveloppent 5 cônes du second degré, supplémentaires des cônes asymptotiques des déférentes. Par chaque point de la cyclide passent 10 cercles tracés sur la surface.

40. Examiner, dans la discussion du n° 582, les cas où la cyclide admet un, deux ou trois plans de symétrie.

41. Examiner également le cas où $A = A' = A''$. (*Cf.* Exercice n° 10.)

42. Étendre aux cyclides l'Exercice 11.

43. Soient λ et λ' deux racines de l'équation (46) du n° 582. Soient Σ, D et Σ', D' les sphères directrices et les déférentes correspondantes. Soient A et A' les centres des sphères. Vérifier que le cône du faisceau (Σ, D) qui a pour sommet A' a pour équation

$$\Sigma + \frac{\lambda' - \lambda}{4} D = 0. \tag{1}$$

Σ et D désignant les premiers membres des équations (49) et (47) du n° 582. Le cône parallèle de sommet à l'origine a pour équation

$$x^2 \frac{A + \lambda'}{A + \lambda} + y^2 \frac{A' + \lambda'}{A' + \lambda} + z^2 \frac{A'' + \lambda'}{A'' + \lambda} = 0. \tag{2}$$

Former de même l'équation du cône du faisceau (Σ', D') qui a pour sommet A. Vérifier que ces deux cônes sont supplémentaires.

44. Démontrer que chacune des cinq focales d'une cyclide admet les quatre autres pour focales. (*Cf.* Exercice résolu n° 2.)

[S'appuyer sur l'Exercice précédent. On peut aussi envisager la développable isotrope circonscrite à la cyclide et dont les cinq focales sont les lignes doubles.]

45. Étendre aux cyclides du troisième degré l'Exercice 12.

46. Chercher les cyclides qui admettent une famille de sphères inscrites.

[Les équations (45) du n° 582 doivent se réduire à une. On trouve que la cyclide doit admettre un plan de symétrie; par exemple, $B'' = 0$. Alors $\lambda = -A''$. La déférente est une conique C. Les sphères inscrites passent par deux points fixes a et b, qui sont des points doubles de la cyclide. Les trois autres déférentes et sphères directrices passent par ces points. Les déférentes admettent C pour focale.]

47. La cyclide de Dupin est la seule cyclide qui possède deux familles de sphères inscrites.

48. Montrer que la surface de l'Exercice résolu n° 6 du Chapitre XXXIII possède une famille de sphères inscrites. Chercher les déférentes et sphères directrices de cette cyclide.

49. Soit M un point quelconque de la cyclide de Dupin du n° 581. Soit p sa puissance par rapport à la sphère Σ (n° 588). Montrer que les quotients $\frac{\mathrm{M}a.\mathrm{M}b}{p}$ et $\frac{\mathrm{M}a'.\mathrm{M}b'}{p}$ sont constants.

50. Vérifier que les droites ab et $a'b'$ sont conjuguées par rapport à Σ et que Σ est orthogonale aux cercles C et C'.

51. Vérifier que la déférente (55) du n° 588 admet les points a, b, a', b' pour ombilics.

52. Étudier les propriétés particulières de la cyclide de Dupin à trois plans de symétrie, obtenue en supposant $m = 0$.

53. Démontrer que la cyclide de Dupin est anallagmatique par rapport à tout point de l'une ou l'autre des droites ab, $a'b'$.

54. Que devient une cyclide de Dupin quand on la transforme par inversion, en prenant le pôle sur l'un des cercles C, C' et, plus particulièrement, en l'un des quatre points doubles a, b, a', b'?

[Tore, cône de révolution. — S'appuyer sur le théorème du n° 585, en remarquant que Γ fait un angle constant avec C'.]

55. Démontrer, par la géométrie élémentaire, que le lieu des centres des sphères bitangentes à un tore est un hyperboloïde de révolution. (Considérer les cercles tangents aux deux cercles méridiens.) Les génératrices de cet hyperboloïde sont les axes des cercles de Villarceau.

56. Démontrer analytiquement le théorème de Villarceau, en faisant un changement de coordonnées amenant le plan des xy à être bitangent.

57. Le plan bitangent au tore du n° 589 qui passe par Oy le coupe suivant deux cercles. On fait tourner l'un d'eux de l'angle u autour de Oz et l'autre de l'angle v. Calculer, en fonction de u et v, les coordonnées des deux points de rencontre des cercles (u) et (v) ainsi obtenus. Calculer également l'équation de la sphère S qui contient ces deux cercles. Calculer le ds^2 du tore en fonction de u, v, du, dv. En déduire que les loxodromies du tore ont pour équation générale une équation du premier degré en u, v. (*Cf.* Chap. XXV, Exercice proposé n° 9.)

[Pour plus de détails, *voir* un article de l'auteur dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques;* mars 1907.]

58. Reprendre l'Exercice proposé n° 9 du Chapitre XII en remarquant que l'enveloppe des sphères (U) et (U') est une cyclide de Dupin. Reprendre aussi l'Exercice proposé n° 16 du même Chapitre.

CHAPITRE XXXIX.

COURBES CYCLOÏDALES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Généraliser la théorie des roulettes, en faisant rouler une courbe quelconque* C′ *sur une courbe quelconque* C.

Traçons, dans le plan fixe de la courbe C, deux axes rectangulaires xOy et, dans le plan mobile de C′, deux axes rectangulaires $x'O'y'$. Soient M le point de contact des deux courbes, MX la demi-tangente positive et MY la demi-normale positive communes aux deux courbes.

Appelons (ξ, η) les coordonnées de M et φ l'angle polaire de MX par rapport à xOy et ξ', η', φ' les mêmes quantités relatives à $x'O'y'$. Soient (α, β) les coordonnées d'un point P quelconque par rapport à $x'O'y'$. Cherchons ses coordonnées (x, y) par rapport à xOy.

Introduisons les coordonnées intermédiaires (X, Y) par rapport aux axes XMY. On passe de xOy à XMY par la translation (ξ, η) et la rotation φ; on a donc

$$(1) \qquad x = \xi + X\cos\varphi - Y\sin\varphi, \qquad y = \eta + X\sin\varphi + Y\cos\varphi.$$

De même,

$$\alpha = \xi' + X\cos\varphi' - Y\sin\varphi', \qquad \beta = \eta' + X\sin\varphi' + Y\cos\varphi';$$

d'où

$$X = (\alpha - \xi')\cos\varphi' + (\beta - \eta')\sin\varphi',$$
$$Y = -(\alpha - \xi')\sin\varphi' + (\beta - \eta')\cos\varphi'.$$

Portant dans (1), il vient

$$(2) \quad \begin{cases} x = \xi + (\alpha - \xi')\cos(\varphi - \varphi') - (\beta - \eta')\sin(\varphi - \varphi'), \\ y = \eta + (\alpha - \xi')\sin(\varphi - \varphi') + (\beta - \eta')\cos(\varphi - \varphi'). \end{cases}$$

D'autre part, la condition de non-glissement s'exprime par

$$(3) \qquad s' = s.$$

On peut, dès lors, imaginer que ξ, η, φ, ξ', η', φ' aient été exprimés en fonction de la seule variable s ou de tout autre paramètre t, en respectant la condition (3).

Si, dans les équations (2), on regarde α, β comme des constantes, on obtient *les équations paramétriques de la courbe* Γ *décrite, dans le plan fixe, par un point* P *quelconque invariablement lié au plan mobile.*

Cherchons la tangente en P à Γ. A cet effet, différentions les formules (2), en tenant compte des relations (n° 196)

$$(4)\qquad d\xi = ds\cos\varphi, \qquad d\eta = ds\sin\varphi; \qquad d\xi' = ds\cos\varphi', \qquad d\eta' = ds\sin\varphi';$$

il vient, après un calcul facile,

$$(5)\qquad dx = -(y-\eta)(d\varphi - d\varphi'), \qquad dy = (x-\xi)(d\varphi - d\varphi').$$

On aperçoit immédiatement la relation

$$(6)\qquad (x-\xi)\,dx + (y-\eta)\,dy = 0,$$

qui exprime que *la tangente en* P *à* Γ *est perpendiculaire à* MP ou bien encore que *la normale est* MP. (*Cf.* t. III, n° 42.)

Cherchons maintenant l'enveloppe d'une courbe S' invariablement liée aux axes $x'Oy'$. Pour définir cette courbe, il suffit d'imaginer que α, β sont des fonctions données d'un paramètre θ. Nous avons alors les équations paramétriques (2) de la courbe mobile, en fonction des deux paramètres s et θ. D'après la méthode générale du n° 279, les points limites sont donnés par

$$(7)\qquad \frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial x}{\partial s} = 0.$$

Mais, d'après (6), nous avons, en regardant θ comme constant,

$$(8)\qquad (x-\xi)\frac{\partial x}{\partial s} + (y-\eta)\frac{\partial y}{\partial s} = 0.$$

En éliminant $\dfrac{\partial x}{\partial s}$ et $\dfrac{\partial y}{\partial s}$ entre (7) et (8), il vient

$$(x-\xi)\frac{\partial x}{\partial\theta} + (y-\eta)\frac{\partial y}{\partial\theta} = 0$$

ou

$$(x-\xi)\left[\frac{d\alpha}{d\theta}\cos(\varphi-\varphi') - \frac{d\beta}{d\theta}\sin(\varphi-\varphi')\right] + (y-\eta)\left[\frac{d\alpha}{d\theta}\sin(\varphi-\varphi') + \frac{d\beta}{d\theta}\cos(\varphi-\varphi')\right] = 0$$

ou, en remplaçant $x-\xi$ et $y-\eta$ par leurs valeurs tirées de (2),

$$(9)\qquad (\alpha-\xi')\frac{d\alpha}{d\theta}+(\beta-\eta')\frac{d\beta}{d\theta}=0.$$

Ceci exprime que la tangente en P à S′ est perpendiculaire à MP. Donc, *les points de contact de* S′ *avec son enveloppe* S *sont les pieds des normales abaissées de* M *sur* S′ (*cf.* t. III, *loc. cit.*).

Cherchons *le rayon de courbure* R *de* S *en* P. A cet effet, prenons comme paramètre θ l'angle de $O'x'$ avec la demi-tangente positive PT à S′ et à S. Nous avons (n° 311)

$$(10)\qquad d\alpha=R'\cos\theta\,d\theta,\qquad d\beta=R'\sin\theta\,d\theta,$$

R′ désignant le rayon de courbure de S′.

En outre, l'équation (9) s'écrit

$$(11)\qquad (\alpha-\xi')\cos\theta+(\beta-\eta')\sin\theta=0.$$

L'angle $\psi=(\widehat{Ox,\ PT})$ est donné par la formule de Chasles :

$$(12)\qquad \psi=\varphi-\varphi'+\theta.$$

Enfin, le rayon de courbure cherché nous sera donné par la formule (n° 311)

$$(13)\qquad dx=R\cos\psi\,d\psi.$$

Afin de simplifier les calculs, imaginons que les axes fixes et les axes mobiles aient été choisis de telle manière que, lorsque le point de contact de S′ et de S est précisément le point P actuellement considéré, $O'x'y'$ et Oxy coïncident, $O'x'$ étant, en outre, la demi-tangente positive en M à C et C_1 et $O'y'$ la demi-normale positive. Avec cette hypothèse, nous avons, *quand le point de contact est en* P,

$$(14)\qquad \xi=\eta=\xi'=\eta'=\varphi=\varphi'=0.$$

La formule (13) devient alors, en tenant compte de (12) et de (2),

$$(15)\qquad R\cos\theta(d\varphi-d\varphi'+d\theta)=d\xi+d\alpha-d\xi'-\beta(d\varphi-d\varphi').$$

Nous avons, d'autre part, en appelant ρ et ρ' les rayons de courbure de C et de C′ au point M,

$$(16)\qquad d\varphi=\frac{ds}{\rho},\qquad d\varphi'=\frac{ds}{\rho'};$$

puis

$$d\xi = d\xi' = ds. \tag{17}$$

Enfin, pour calculer $d\vartheta$, différentions (11); nous obtenons, en tenant compte de (10) et *ensuite* de (14) et (17).

$$d\vartheta(\mathrm{R}' - \alpha\sin\vartheta + \beta\cos\vartheta) - ds\cos\vartheta = 0$$

ou, en posant $r = \overline{\mathrm{MP}}$,

$$d\vartheta(\mathrm{R}' + r) = ds\cos\vartheta. \tag{18}$$

Finalement, si l'on porte (10), (16), (17) et (18) dans (15), il vient

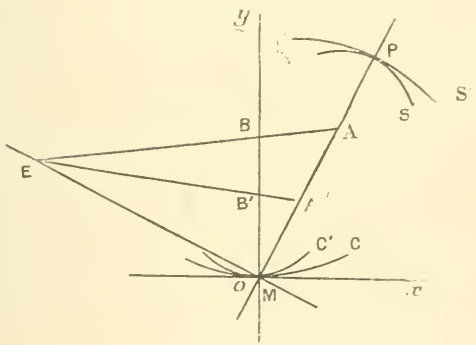
$$(\mathrm{R}' + r)\cos\vartheta\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right) = \frac{(\mathrm{R}' - \mathrm{R})\cos^2\vartheta}{\mathrm{R} + r}$$

ou

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} = \frac{\mathrm{R}' - \mathrm{R}}{(\mathrm{R}' + r)(\mathrm{R} - r)}\cos\vartheta = \left(\frac{1}{\mathrm{R} - r} - \frac{1}{\mathrm{R}' + r}\right)\cos\theta. \tag{19}$$

Introduisons les centres de courbure A, A', B, B' de S, S', C, C

Fig. 42.



(*fig.* 42). L'équation (19) devient

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{MB}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{MB}'}} = \left(\frac{1}{\overline{\mathrm{MA}}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{MA}'}}\right)\cos\vartheta. \tag{20}$$

Cette formule porte le nom de *formule de Savary*.

Elle donne lieu à la propriété suivante : *Les droites* AB *et* A'B' *se coupent sur la perpendiculaire en* M *à* MP. En effet, si E et E' sont les points de rencontre respectifs de AB et A'B' avec cette perpendiculaire,

orientée par l'angle θ, on a (1)

$$\frac{1}{\overline{MB}} - \frac{\cos\theta}{\overline{MA}} = \frac{\sin\theta}{\overline{ME}}, \qquad \frac{1}{\overline{MB'}} - \frac{\cos\theta}{\overline{MA'}} = \frac{\sin\theta}{\overline{ME'}};$$

en tenant compte de (20), on en tire $\overline{ME} = \overline{ME'}$.

Cette élégante propriété permet de construire simplement l'un des quatre points A, B, A′, B′ quand on connaît les trois autres. Cette construction est dite *construction de Savary*.

Remarque. — Si S′ se réduit à un point P, S est la courbe décrite par ce point; le point A′ est confondu avec P et la construction de Savary donne A, si l'on connaît B et B′.

2. *Tracer l'hypocycloïde enveloppée par la droite*

$$y = mx + \frac{1 + m - m^3}{1 + m^2}. \tag{1}$$

Nous allons chercher un point d'où l'on puisse mener trois tangentes formant un faisceau régulier. L'équation (1) ou

$$m^3(x - 1) - m^2 y + m(x + 1) + 1 - y = 0 \tag{2}$$

doit être de la forme

$$\operatorname{tang} 3\varphi = \frac{3m - m^3}{1 - 3m^2}$$

ou

$$m^3 - 3m^2 \operatorname{tang} 3\varphi - 3m + \operatorname{tang} 3\varphi = 0. \tag{3}$$

En comparant les coefficients de rang impair dans les deux équations, on a

$$\frac{x - 1}{x + 1} = -\frac{1}{3}, \qquad x = \frac{1}{2}.$$

---

(1) Pour établir la première de ces formules, par exemple, on peut remarquer que si l'on prend ME pour axe des X et MP pour axe des Y, l'équation de AE est

$$\frac{X}{\overline{ME}} + \frac{Y}{\overline{MA}} = 1.$$

En y remplaçant X et Y par les coordonnées de B, soit $\overline{MB}\sin\theta$ et $\overline{MB}\cos\theta$, on obtient la formule.

De même, en comparant les coefficients de rang pair, on a

$$\frac{-r}{1-y}=-3, \qquad r=\frac{3}{4}.$$

Enfin, en comparant les deux derniers coefficients, on a

$$\operatorname{tang} 3\varphi=-3\times\frac{1-y}{x+1}=-\frac{1}{2}=\operatorname{tang}(-29^{\circ},5).$$

Le centre ω *de l'hypocycloïde a pour coordonnées* $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$. Une de ses tangentes de rebroussement a pour angle polaire $\varphi=-9^{\circ},8$. Cherchons son point de contact. On a son abscisse, en dérivant (1) par rapport à m :

$$x=\frac{m^4+4m^2+2m-1}{(1+m^2)^2}=-1,15.$$

en remplaçant m par $-\operatorname{tang}(9^{\circ},8)=-0,155$. Pour avoir y, portons cette valeur de x dans l'équation de la droite de coefficient angulaire $-0,155$ menée par le centre ω :

$$y=0,75+0,155\times 1,65=1,01.$$

Ayant le centre ω et un point de rebroussement, il suffit d'achever le triangle équilatéral et la construction de la courbe en résulte. Nous laissons au lecteur le soin de faire le dessin.

3. *Soient une hypocycloïde à trois rebroussements* H *et un point* P *pris sur son cercle tritangent* γ. *De ce point, on mène les deux tangentes rectangulaires* PT, PT'. *Elles rencontrent* γ *en* T, T'. *Soient, d'autre part,* M *et* M' *leurs points de contact. Soit enfin* PT'' *la troisième tangente issue de* P, M'' *son point de contact et* T'' *son point de rencontre avec* γ. *Démontrer les propriétés suivantes :*

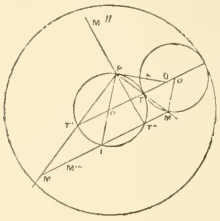
Les points T *et* T' *sont les milieux de* PM *et* PM' *et* P *est le milieu de* T''M''; PT'' *est perpendiculaire en* T'' *à la droite* MM', *laquelle est tangente à* H, *a son milieu* I *sur* γ *et son point de contact* μ *symétrique de* T'' *par rapport à* I. *De plus,* M''T'' *a pour milieu* P.

Il serait aisé d'établir ces propriétés par le calcul et nous conseillons au lecteur de le faire. Nous allons indiquer ici une solution géométrique.

Considérons une position quelconque du cercle roulette C' et la position correspondante M du point qui décrit H (*fig.* 43). Les deux cercles C' et γ sont égaux et tangents en T. Les deux triangles TO'M et TOP

sont symétriques par rapport à T; donc, T *est le milieu de* MP; de plus, OP est parallèle à O′M. *Quand* OT *tourne de l'angle* φ, O′M tourne de l'angle -2φ (n° 594); donc, OP *tourne aussi de l'angle* -2φ (¹).

Fig. 43.



Cela posé, si T vient en T′ diamétralement opposé à T sur γ, OT a tourné de π; donc OP tourne de -2π; autrement dit, P revient à la même position. La droite PT′ est la tangente perpendiculaire à PT (²); son point de contact M′ est symétrique de P par rapport à T′.

Si T vient en P, OP tourne de l'angle $-2\widehat{\mathrm{TOP}}$; P vient donc au point T″ symétrique de P par rapport à OT. La troisième tangente issue de P est PT″; elle est perpendiculaire à TT′. Son point de contact M″ est symétrique de T″ par rapport à P. Le segment MM′ est homothétique de TT′ par rapport à P et dans le rapport 2; donc, il passe par T″, où il coupe PT″ à angle droit. La droite MM′ est la tangente à H perpendiculaire à PT″. Elle rencontre γ au point I homothétique de O, donc milieu de MM′. Son point de contact M‴ est ce que devient M, quand T vient en I et P en T″; il est donc symétrique de T″ par rapport à I.

Autre démonstration. — Voici une autre démonstration moins élémentaire.

Considérons un réseau tangentiel (ρ) admettant pour coniques de base

---

(¹) Ceci prouve que les angles polaires φ et φ' de T et de P sont liés par une relation de la forme $\varphi' + 2\varphi = \text{const.}$ (*Cf.* n° 596 et Exercice proposé n° 17.)

(²) Il n'y en a pas d'autre, car, si OT tourne de φ, la bissectrice de $\widehat{\mathrm{TOP}}$ tourne de $\frac{\varphi - 2\varphi}{2} = -\frac{\varphi}{2}$; la tangente PT, qui est perpendiculaire à cette bissectrice, tourne du même angle. Pour qu'elle tourne de $\frac{\pi}{2}$, il faut donc que OT tourne de $-\pi$. Nous démontrons ainsi la propriété caractéristique du cercle tritangent (n° 604).

deux paraboles Π_1 et Π_2 et les points cycliques (1). Soit (R) le réseau ponctuel contravariant (2) (n° 511).

Toute conique dégénérée de (ρ) se compose d'un point P à distance finie et d'un point P′ à l'infini (3). Donc, *la hessienne h* comprend la droite de l'infini, comme lieu de P′, et une conique γ, comme lieu de P. D'ailleurs, si P′ vient en un des points cycliques, P va à l'autre. Donc, *γ est un cercle*.

La cayleyenne H est l'enveloppe des droites PP′ (4). Comme PP′ coïncide deux fois avec la droite de l'infini, quand P′ tend vers l'un des points cycliques, *cette droite est tangente double et ses points de contact sont* les positions limites de P′, c'est-à-dire *les points cycliques*. Comme la cayleyenne est de troisième classe, *c'est une hypocycloïde à trois rebroussements* (n° 602).

Appliquons maintenant les propriétés générales établies aux n^{os} 512 et 513.

Tout point P du cercle γ est *le point de rencontre de deux tangentes associées* PT et PT′ de H. Or, ces deux droites doivent être conjuguées par rapport à toute conique de (ρ), en particulier par rapport aux points cycliques; *elles sont donc rectangulaires*. Il s'ensuit que γ est le cercle tritangent de H.

Le point P′ associé à P sur la hessienne est un point à l'infini. D'autre part, on sait que la tangente Pθ en P à γ est conjuguée harmonique de PP′ par rapport aux deux droites associées PT, PT′. Il en résulte que PP′ est la polaire, par rapport à γ, du point de rencontre θ de cette tangente avec le diamètre TT′. Donc, PP′ *est perpendiculaire à* TT′. C'est d'ailleurs la troisième tangente à H issue de P.

On sait maintenant que, corrélativement, le troisième point de rencontre de PP′ avec la hessienne, c'est-à-dire le point T″ de γ, est conjugué harmonique du point de contact M″ par rapport à PP′. Comme P′ est à l'infini, cela veut dire que P *est le milieu de* T″M″.

On sait aussi que *la droite* MM′ qui joint les points de contact des deux tangentes associées PT, PT′ *est une tangente à* H, d'ailleurs associée à la troisième tangente PT″ issue de P. Elle est donc perpendiculaire en T″ à PT″. Elle rencontre γ au milieu I de MM′. Si l'on fait

(1) C'est le réseau des paraboles homofocales à un faisceau tangentiel de paraboles.

(2) C'est le réseau des hyperboles équilatères ayant mêmes asymptotes qu'un faisceau ponctuel d'hyperboles équilatères.

(3) Le point P est le foyer commun à toutes les paraboles du réseau dont l'axe passe par P.

(4) C'est-à-dire des axes des paraboles.

jouer à ce point le rôle du point P, IT″ joue le rôle de PT″, car son associée passe par T″ et non par I; donc, M‴ joue le rôle de M″, et, par suite, est symétrique de T″ par rapport à I.

Nous avons finalement démontré toutes les propriétés de l'énoncé. Voici maintenant quelques conséquences qui résultent naturellement de la considération des réseaux (ρ) et (R) :

I. *L'enveloppe des axes des paraboles inscrites dans un triangle* T *est une hypocycloïde à trois rebroussements, dont le cercle tritangent constitue le lieu des foyers* (1).

II. *L'enveloppe des asymptotes des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle* T′ *est une hypocycloïde à trois rebroussements, dont le cercle tritangent est le cercle des neufs points de* T′ (n° 303).

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Établir les formules (12) du n° 395 comme cas particulier des formules (2) de l'Exercice résolu n° 1.

2. Soit une courbe quelconque C. On prend sa symétrique C′ par rapport à une de ses tangentes. Puis, on fait rouler C′ sur C. Montrer que tout point P entraîné par C′ décrit une courbe homothétique d'une podaire de C (évident géométriquement). Cas où C est un cercle. Cas où C est une conique et P un foyer de C′.

3. On reprend les notations précédentes et l'on considère une courbe S′ invariablement liée à C′. Montrer que l'enveloppe de cette courbe est aussi une partie de l'enveloppe d'une famille de cercles admettant C pour déférente. Dans le cas où C est une conique, quelle est l'enveloppe d'un cercle S′ ayant pour centre un foyer de C′?

4. On fait rouler sur Ox la courbe C définie par les équations

$$x = 3t - t^3, \qquad y = 3t^2.$$

Trouver le lieu décrit par un point quelconque P entraîné par C. Cas où le point P a primitivement pour coordonnées (0, 1).

[Quartique unicursale. Dans le cas particulier, parabole.]

---

(1) Ce cercle est le cercle circonscrit au triangle T (Chap. XXXV, Exercice proposé n° 40).

5. Même question que précédemment, en prenant pour courbe C la chaînette $y = \operatorname{ch} x$. Montrer que tout point P de la base de la chaînette décrit une courbe dont l'équation polaire peut s'écrire

$$\operatorname{sh}(\rho - \alpha) = \operatorname{tang} \omega,$$

si l'on prend pour pôle le point $(0, -1)$.

6. La normale PN à une courbe Γ roule sans glisser sur la développée C. En déduire que si un point Q est invariablement lié à l'angle droit NPT, il décrit une courbe dont la normale passe par le centre de courbure M de Γ.

7. Appliquer la construction de Savary aux épicycloïdes et hypocycloïdes, ainsi qu'à la cycloïde. Retrouver, par ce moyen, les propriétés des nos 597 et 607.

[En appliquant le théorème de Ménélaüs au triangle MPB′ et à la transversale ACB, on retrouve tout de suite la formule (23) du n° 597. En prenant le triangle BB′C et la transversale AMP, on trouve

$$\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BC}} = \frac{1}{1 - 2m}.$$

Comme C, diamétralement opposé à P, décrit une courbe égale à la proposée, on en déduit la similitude de la développée.]

8. Pour construire une courbe cycloïdale, il est commode d'employer les coordonnées polaires ρ, ω. Calculer, d'après les formules (12) du n° 595, ρ^2 et $\frac{d\omega}{d\vartheta}$ en fonction de ϑ.

[Pour $\frac{d\omega}{d\vartheta}$, employer la formule : $\rho^2 d\omega = x\,dy - y\,dx$. On trouve que le signe de $\frac{d\omega}{d\vartheta}$ est celui d'une quantité λ_ϑ qui, lorsque ϑ croît de 0 à $\frac{\pi}{m}$, croît de $\lambda_0 = (1-e)(1-m+em)$ à $\lambda_1 = (1+e)(1-m-em)$. Pour discuter les différentes formes de courbes, on est ainsi conduit à faire des hypothèses sur les signes de λ_0 et de λ_1.]

9. Pour quelle valeur de e la courbe passe-t-elle à l'origine? Calculer

ρ et ω dans cette hypothèse; en déduire l'équation polaire de la courbe

$$\left[\rho = 2R(1-m)\cos\frac{\omega}{1-2m}\right].$$

10. Calculer l'équation qui donne les θ des points d'inflexion.

$\left[x'y'' - y'x'' = 0;\ e^2(m-1) + m + e(1-2m)\cos\frac{\theta}{m} = 0.\right.$ Le premier membre décroît de $(1-e)[m+e(1-m)]$ à $(1+e)[m-e(1-m)]$ quand θ croît de 0 à $\frac{\pi}{m}$.$\left.\right]$

11. Construire, en s'aidant des Exercices précédents, les courbes cycloïdales définies par les systèmes suivants de nombres caractéristiques :

$$m = \frac{1}{3}; \qquad e = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3;$$

$$m = \frac{1}{4}; \qquad e = \frac{1}{2}, 2, 3, 4;$$

$$m = -4; \qquad e = \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 1, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, 2;$$

$$m = -1; \qquad e = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3;$$

$$m = -\frac{1}{4}; \qquad e = \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 1, 3, 5, 10.$$

12. Démontrer que la courbe définie par les équations

$$x = A\cos t + B\cos t', \qquad y = A\sin t + B\sin t',$$

les variables t et t' étant liées par

$$\alpha t' + \beta t + \gamma = 0,$$

est une courbe cyloïdale. Calculer ses nombres caractéristiques.

13. Pour qu'une courbe cycloïdale soit algébrique, il faut et il suffit que m soit commensurable. Montrer qu'elle est alors unicursale et calculer son degré ainsi que sa classe.

$\left[\text{Si } m = \frac{p}{q} < \frac{1}{2} \text{ et } p > 0, \text{ le degré est } 2|p-q|.\right.$ La classe est égale à $p + |p-q|$. On l'obtient en cherchant les tangentes issues d'un point P du cercle F (n° 596) et utilisant la relation (19). On doit supposer successivement que T est en P, puis que T′ est en P.$\left.\right]$

14. Montrer que, si l'on intervertit les rôles des points T et T′ du n° 596, on obtient le deuxième mode de génération, résultant du changement de m en $1 - m$ (n° 594).

15. Démontrer que le rapport $\frac{\overline{PT'}}{\overline{PT}}$ est constant.

[Calculer λ et λ' au moyen des équations (17) et (18) du n° 596. On trouve $\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1-m}{m}$.]

16. Les angles polaires ω et ω' de T et T′ étant supposés liés par la relation

$$A\omega + B\omega' + C = 0,$$

trouver les rebroussements de l'enveloppe. (*Cf.* Chap. II, Exercice résolu n° 2.)

17. Sur un cercle, on prend un point fixe A et un point variable M. Par M, on mène une droite Mλ, de direction fixe. Montrer que la symétrique de AM par rapport à Mλ et les bissectrices de l'angle $\widehat{AM\lambda}$ enveloppent des hypocycloïdes à trois rebroussements.

18. Calculer l'équation de la tangente à la courbe (12) du n° 595. Montrer que la podaire d'une épicycloïde ou hypocycloïde par rapport à son centre a une équation polaire de la forme $\rho = A\cos k\omega$ et réciproquement. Calculer R et m en fonction de A et k.

19. Calculer l'aire d'une boucle de courbe cycloïdale.

20. Calculer l'équation tangentielle de l'hypocycloïde à quatre rebroussements.

21. Un triangle isoscèle OAB varie de manière que les côtés égaux OA, OB demeurent constants, le sommet O et la hauteur issue de ce point restant fixes. Quelle est l'enveloppe des deux autres hauteurs ? (Hypocycloïde à quatre rebroussements.)

22. Soient deux paraboles focales l'une de l'autre et d'axe commun Ox. On prend un point M sur l'une et un point M′ sur l'autre. Soient I le milieu de MM′ et P le plan mené par ce point perpendiculairement à MM′.

1° On assujettit MM′ à être perpendiculaire à Ox. Montrer qu'elle

engendre une surface dont la ligne de striction se projette sur yOz suivant une hypocycloïde à quatre rebroussements. Quelle est alors l'enveloppe du plan P ?

2° On assujettit le plan P à faire un angle constant avec Ox. Montrer que l'arête de rebroussement de son enveloppe est une hélice tracée sur un cylindre à base hypocycloïdale.

[*Nota.* — Quand M et M′ varient d'une manière quelconque, P enveloppe une surface minima appelée *surface d'Enneper*.]

23. Les plans tangents à un paraboloïde hyperbolique équilatère qui font 45° avec le plan tangent au sommet enveloppent, dans ce dernier, une hypocycloïde à quatre rebroussements.

24. Reprendre la démonstration du n° 602, en montrant qu'il existe un point d'où l'on peut mener trois tangentes formant un faisceau régulier. Puis prendre ce point pour origine et l'une des tangentes pour axe des x.

25. Construire les hypocycloïdes enveloppes des droites suivantes :

$$y = mx + \frac{1}{m^2 + 1},$$

$$y = mx - \frac{2m + 1}{m^2 + 1},$$

$$y = mx + \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1},$$

$$y = mx + \frac{m^3 + 2}{m^2 + 1}.$$

26. Démontrer analytiquement les propriétés I et II de l'Exercice résolu n° 3.

27. Démontrer que les enveloppes suivantes sont des hypocycloïdes à trois rebroussements :

1° Enveloppe des axes des paraboles circonscrites à un triangle;

2° Enveloppe des tangentes au sommet des paraboles inscrites dans un triangle;

3° Enveloppe des droites de Simson relatives à un triangle.

28. On reprend l'Exercice proposé n° 16 du Chapitre XXXIII. Trouver l'enveloppe de l'axe de H quand D passe par un point fixe.

29. On reprend l'Exercice 14 du même Chapitre. Trouver l'enveloppe des axes des paraboles, ainsi que de leurs tangentes au sommet.

30. On reprend l'Exercice 25 du même Chapitre :

1° Trouver l'enveloppe des axes des coniques S dont le point de Frégier relatif à O est un point donné de Oy;

2° Trouver l'enveloppe des axes et des asymptotes des coniques S qui sont des hyperboles équilatères;

3° Trouver l'enveloppe des axes des coniques S qui sont des paraboles, ainsi que le lieu de leurs foyers.

31. Par un point de rebroussement A d'une hypocycloïde à trois rebroussements H, on mène une sécante variable, qui rencontre la courbe en P et Q. Les tangentes en ces points se coupent en un point M, qui décrit une ellipse E tangente à H aux deux autres points de rebroussement B et C et au sommet situé sur OA, ainsi qu'au cercle base au point A′ diamétralement opposé à A. Les tangentes en P et Q à H divisent harmoniquement BC.

[Partir de la tangente (39) du n° 604 et en déduire les équations paramétriques de H. Les points P et Q sont caractérisés par $mm' = 3$.]

32. Si un point P tourne uniformément sur un cercle, pendant que ce cercle est animé d'une translation rectiligne et uniforme, le point P décrit une courbe cycloïdale à base rectiligne.

33. Les équations

$$x = \alpha t + \rho\cos(\omega t + \varphi), \qquad y = \beta t + \rho\sin(\omega t + \varphi)$$

définissent une cycloïde si $\alpha^2 + \beta^2 = \rho^2$. Chercher ses rebroussements et ses sommets.

34. Chercher les points d'inflexion d'une cycloïde raccourcie et les points doubles d'une cycloïde allongée.

35. La tangente en P à une cycloïde rencontre la tangente au sommet S en un point T. Démontrer que l'arc SM égale 2PT.

36. Une droite tourne uniformément autour d'un point, pendant que ce point décrit uniformément une droite fixe. Montrer qu'elle enveloppe une cycloïde.

CHAPITRE XL.

COURBES ET SURFACES DIVERSES.

EXERCICES RÉSOLUS.

1. *Montrer que, par deux points* A *et* B, *on peut faire passer deux arcs de chaînette à base horizontale et de longueur donnée.*

Prenons pour origine le milieu O de AB. Soient (a, b) les coordonnées de A et $(-a, -b)$ celles de B. Soit l la longueur donnée. L'équation de la chaînette cherchée est de la forme

$$y - \beta = m \operatorname{ch} \frac{x - \alpha}{m}. \tag{1}$$

En écrivant qu'elle passe par A et B, nous avons les deux équations

$$b - \beta = m \operatorname{ch} \frac{a - \alpha}{m}, \qquad b + \beta = - m \operatorname{ch} \frac{a + \alpha}{m}. \tag{2}$$

Nous en aurons une troisième, en écrivant que l'arc AB a, pour longueur l.

$$m \left(\operatorname{sh} \frac{a - \alpha}{m} + \operatorname{sh} \frac{a + \alpha}{m} \right) = l. \tag{3}$$

Nous avons trois équations à trois inconnues : α, β, m. La dernière ne renferme pas β. En ajoutant les deux premières, nous en obtenons une autre ne contenant que α et m :

$$2b = m \left(\operatorname{ch} \frac{a - \alpha}{m} - \operatorname{ch} \frac{a + \alpha}{m} \right). \tag{4}$$

En développant les sinus et cosinus hyperboliques, les équations (3) et (4) s'écrivent

$$\operatorname{sh} \frac{a}{m} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{m} = \frac{l}{2m}, \tag{5}$$

$$\operatorname{sh} \frac{a}{m} \operatorname{sh} \frac{\alpha}{m} = - \frac{b}{m}. \tag{6}$$

Éliminons α, en élevant les deux équations au carré et retranchant la seconde de la première :

$$\operatorname{sh}^2\frac{a}{m}=\frac{1}{m^2}\left(\frac{l^2}{4}-b^2\right).$$

Prenons pour inconnue auxiliaire $z=\frac{a}{m}$. L'équation ci-dessus s'écrit, en posant $\mathrm{K}^2=\frac{l^2-4b^2}{4a^2}$,

$$\operatorname{sh}^2 z=\mathrm{K}^2 z^2;$$

d'où, en remarquant que, d'après (5), le rapport $\frac{\operatorname{sh} z}{z}$ doit être positif,

$$\operatorname{sh} z=\mathrm{K}z. \tag{7}$$

Si l'on coupe la courbe $y=\operatorname{sh}x$ (t. I, n° 109) par la droite $y=\mathrm{K}x$, on voit que cette équation n'a pas de racines si $\mathrm{K}<1$, c'est-à-dire si $l^2<4(a^2+b^2)$ ou $l<\mathrm{AB}$. Cela était à prévoir, puisque l'arc AB est nécessairement plus long que la corde AB. Supposons donc $l>\mathrm{AB}$, d'où $\mathrm{K}>1$. L'équation (7) admet alors deux racines opposées z et $-z$. Ayant z, on en déduit $m=\frac{a}{z}$. L'équation (6) donne ensuite

$$\operatorname{sh}\frac{\alpha z}{a}=-\frac{bz}{a\operatorname{sh}z}=-\frac{b}{a\mathrm{K}}. \tag{8}$$

On en déduit une seule valeur pour $\frac{\alpha z}{a}$, donc pour α. Enfin, en retranchant les équations (2), on a

$$\beta=-\frac{a}{z}\operatorname{ch}z\operatorname{ch}\frac{\alpha z}{a}. \tag{9}$$

Nous obtenons bien deux solutions.

On passe de l'une à l'autre, en changeant z en $-z$, donc m en $-m$, α en $-\alpha$, β en $-\beta$. Cela revient à changer x en $-x$ et y en $-y$ dans (1). Les deux solutions sont symétriques par rapport au milieu de AB, ce qui était évident *a priori*.

Remarque. — Cet exercice donne la solution du problème suivant : *Trouver la position d'équilibre d'un fil pesant, de longueur l, dont les extrémités sont attachées aux points* A *et* B. (*Cf.* t. III, Chap. IX, Exercice proposé n° 12).

2. *Déterminer toutes les hélices pouvant être représentées par des équations de la forme*

$$mx=az^m, \qquad py=bz^p. \tag{1}$$

(É. P., 1913.)

Nous allons écrire qu'il existe une droite $O\lambda$, de cosinus directeurs α, β, γ, qui fait un angle constant V avec les tangentes à la courbe :

$$(2) \qquad \cos V = \frac{\alpha a z^{m-1} + \beta b z^{p-1} + \gamma}{\sqrt{a^2 z^{2m-2} + b^2 z^{2p-2} + 1}}.$$

Une telle identité n'est possible que si la quantité sous le radical est un carré parfait, ce qui exige que l'un des trois termes soit le double produit des racines carrées des deux autres. Nous avons donc les trois solutions :

$$\begin{aligned} m - 1 &= 2p - 2, & b^2 &= 2a; \\ p - 1 &= 2m - 2, & a^2 &= 2b; \\ m + p &= 2, & 2ab &= 1. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que les deux dernières solutions se déduisent de la première par une symétrie par rapport à un bissecteur. A ces symétries près, la solution la plus générale du problème est donnée par les courbes

$$(3) \qquad (2p-1)x = az^{2p-1}, \qquad 2py = a^2 z^{2p}.$$

Si l'on revient à l'identité (2), on voit qu'elle exige

$$\beta = 0, \qquad \gamma = \alpha = \cos V = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

puisque $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Donc, les courbes (3) sont des hélices, dont *le cylindre rectifiant a ses génératrices parallèles à la première bissectrice de* zOx *et* dont *les tangentes font* 45° *avec ces génératrices.*

Remarque. — La courbe (3) se trouve sur le cône du second degré :

$$4p^2 y^2 = (2p-1)a^3 zx.$$

3. *Soient une droite* $O\lambda$ *de cosinus directeurs* (α, β, γ) *et un point* $A(x_0, y_0, z_0)$. *Trouver les équations de l'hélice circulaire* $O\lambda$, *de pas* k *et passant par* A.

Soit $P(x_1, y_1, z_1)$ la projection de A sur $O\lambda$. Appelons R la distance PA et

$$(1) \qquad a = \frac{x_0 - x_1}{R}, \qquad b = \frac{y_0 - y_1}{R}, \qquad c = \frac{z_0 - z_1}{R}$$

les cosinus directeurs de la demi-droite PA. Soient a', b', c' les cosinus directeurs de la demi-droite PB telle que le trièdre PABλ soit trirec-

tangle et positif. On a (n° 35)

$$(2) \qquad a' = c\beta - b\gamma = \frac{(z_0 - z_1)\beta - (y_0 - y_1)\gamma}{R} = \frac{z_0\beta - y_0\gamma}{R},$$

en remarquant que x_1, y_1, z_1 sont proportionnels à α, β, γ. Cela posé, soit un point quelconque M de l'hélice. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ peut être considéré comme la somme géométrique du vecteur $\overrightarrow{OP}$, d'un vecteur $R\cos t$ porté par PA, d'un vecteur $R\sin t$ porté par PB et d'un vecteur kt porté par Pz. On a donc

$$x = x_1 + R(a\cos t + a'\sin t) + k\alpha t$$

ou, en tenant compte de (1) et (2),

$$(3) \qquad x = x_1 + (x_0 - x_1)\cos t + (\beta z_0 - \gamma y_0)\sin t + k\alpha t.$$

Si l'on remarque enfin que $x_1 = \alpha(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0)$, l'équation (3) et les deux équations analogues constituent les équations demandées.

EXERCICES PROPOSÉS.

1. Trouver et construire les arcs de chaînette qui ont pour longueur 6,5 et qui ont pour extrémités les points A(0, 1) et B(2,5 ; 1,8).

2. Soit M un point quelconque de la chaînette du n° 609. On le projette en P sur Ox; puis, on projette P en Q sur la normale MN. Montrer que MQ = 1 et PQ = arc AM. Calculer le rayon de courbure de la courbe lieu de Q. Vérifier que l'aire comprise entre la chaînette, Oy, Ox et MP égale deux fois l'aire du triangle MPQ.

3. Soient s l'arc de tractrice AP (n° 610) et y l'ordonnée du point P. Vérifier la relation $ye^s = 1$.

4. Quelles sont les trajectoires orthogonales d'une famille de cercles égaux ayant leurs centres en ligne droite ? (*Cf.* Chap. XXIV, Exercice résolu n° 2.)

5. Chercher les lignes géodésiques de la caténoïde.

[Appliquer l'équation de Clairaut (Chap. XXV, Exercice résolu n° 5), en utilisant la formule (11) du n° 611.]

6. Calculer le ds^2 de la pseudosphère. Montrer que ses loxodromies se projettent sur xOy suivant des spirales hyperboliques.

7. Chercher les géodésiques de la pseudosphère. Montrer que leurs projections sur xOy sont toutes des courbes semblables.

8. Chercher les lignes asymptotiques de la pseudosphère.
[Appliquer la formule (14) du n° 364. On trouve $v \pm u = \text{const.}$]

9. Soit une spirale logarithmique, de pôle O. Soient M un de ses points et C le centre de courbure correspondant. Démontrer que l'aire balayée par le rayon vecteur depuis OM jusqu'au pôle est égale à l'aire du triangle OMC.

10. Écrire les équations paramétriques de la spirale logarithmique, en coordonnées cartésiennes.

11. Démontrer que les hélices dont le cylindre rectifiant a pour équation $y = \operatorname{ch} x$ se projettent suivant des hyperboles sur le plan yOz.

12. La cubique gauche

$$x = 3t, \qquad y = 3t^2, \qquad z = 2t^3$$

est une hélice. Chercher l'équation de son cylindre rectifiant.

13. Déterminer a et b pour que la courbe

$$xy = a, \qquad x^2 = byz$$

soit une hélice.

14. Montrer que toute hélice est une développée de courbes planes situées dans les plans de sections droites du cylindre rectifiant. En déduire les équations paramétriques de l'hélice la plus générale, sans aucun signe de quadrature.
(Prendre la trace de la tangente sur un plan de section droite.)

15. Écrire les équations d'une hélice circulaire rapportée au trièdre de Frenet d'un de ses points. (É. P., 1913.)
$\left(\text{Faire tourner les axes de } \frac{\pi}{2} - V \text{ autour de } Ox.\right)$

16. Démontrer que la projection d'une hélice circulaire sur un plan de section droite du cylindre rectifiant parallèlement à l'une des tangentes est une cycloïde.

17. Les rayures d'un canon sont inclinées à i degrés sur l'axe du tube. Le calibre est a millimètres. La vitesse initiale de l'obus est v_0 mètres par seconde. Calculer le nombre de tours par seconde que fait l'obus à la sortie du canon. Application numérique :

$$a = 75, \qquad i = 5^\circ, \qquad v_0 = 550.$$

18. Le lieu des centres de courbure d'une hélice circulaire est une autre hélice circulaire. Montrer que le plan osculateur de chacune d'elles est normal à l'autre.

19. Montrer que toute courbe tracée sur un cône de révolution et coupant les génératrices sous un angle constant est une hélice dont le cylindre rectifiant a ses génératrices parallèles à l'axe du cône et a pour section droite une spirale logarithmique. (*Hélice cylindro-conique.*)

20. On enroule un plan P sur un cône de révolution. Trouver les équations de la courbe C, suivant laquelle s'enroule une droite D de ce plan.

[Prendre pour O et Oz, le sommet et l'axe du cône. Soit OA la perpendiculaire abaissée de O sur D, dans la position où cette droite est génératrice de contact. Prendre OA dans le plan des zx. Si l'on appelle a la distance OA et θ le demi-angle au sommet du cône, la projection de C sur xOy a pour équation polaire

$$\rho \cos(\omega \sin\theta) = a.]$$

21. On coupe un hélicoïde gauche à plan directeur, d'axe Oz et de pas k, par un cylindre de révolution contenant Oz. Démontrer que l'intersection est une hélice circulaire de pas $\frac{k}{2}$.

22. On coupe l'hélicoïde précédent par un cône de révolution d'axe Oz. Quelle est la projection de l'intersection sur xOy ?

23. On considère les deux points

$$\mathrm{M} : x = \mathrm{sh}\, u \cos v, \qquad y = \mathrm{sh}\, u \sin v, \qquad z = v;$$
$$\mathrm{M}' : x' = \mathrm{ch}\, u \sin v, \qquad y' = -\mathrm{ch}\, u \cos v, \qquad z' = -u.$$

Lorsque u et v varient, le premier décrit un hélicoïde H et le second une caténoïde C. Démontrer que les plans tangents en M et M′ à ces deux surfaces sont constamment parallèles. Démontrer également que les

tangentes à deux courbes homologues quelconques sont perpendiculaires et enfin que deux arcs homologues sont égaux.

(On a identiquement

$$dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz' = 0; \qquad ds^2 = ds'^2;$$

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = -\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \frac{\partial y'}{\partial u} = -\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \frac{\partial z'}{\partial u} = -\frac{\partial z}{\partial v};$$

$$\frac{\partial x'}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial y'}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z'}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial u}.)$$

FIN DU TOME II.

ERRATA.

Tome I (*Exercices*).

Page 14, ligne 3, *au lieu de* $-\frac{1}{4}h^4$, *lire* $-\frac{1}{8}h^4$.

Page 20, ligne 2 en remontant, *au lieu de* $(-)^n$, *lire* $(-1)^n$.

Page 27, ligne 12, *au lieu de* expliquer, *lire* appliquer.

Page 39, ligne 4, supprimer la troisième équation.

Page 46, ligne 15 et suivantes, remplacer partout n par $n+1$.

Page 48, ligne 17, *au lieu de* $\log\frac{x^2-1}{x+2}$, *lire* $\log\frac{1-x^2}{x+2}$.

Page 80, ligne 2, *au lieu de* $\frac{3}{4}$, *lire* $\left(\frac{3}{4}\right)^2$; *au lieu de* $\frac{2}{\sqrt{3}}$, *lire* $\frac{8}{3\sqrt{3}}$; *au lieu de* $\frac{1}{3\sqrt{3}}$, *lire* $\frac{4}{3\sqrt{3}}$.

Page 80, ligne 4, *au lieu de* $-\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, *lire* $-\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Page 86, ligne 15, *au lieu de* $-\frac{1}{x-1}$, *lire* $+\frac{1}{x-1}$; ligne 16, *au lieu de* $-\log(x-1)$, *lire* $+\log(x-1)$.

Page 88, ligne 9, quatrième intégrale de l'Exercice 1, remplacer la borne inférieure 0 par 1.

Page 92, ligne 21, *au lieu de* d'abscisses x_1 et x_2, *lire* d'abscisses positives x_1 et x_2.

Page 105, ligne 2, *au lieu de* base, *lire* tangente de rebroussement.

Page 139, ligne 22, *au lieu de* $[f'''(h)^2]$, *lire* $[f'''(h)]^2$.

Tome II (*Cours*).

Page 53, ligne 7, *au lieu de* 42, *lire* 43.

Page 383, ligne 2, *au lieu de* 334, *lire* 335.

Page 402, ligne 20, *au lieu de* 371, *lire* 372.

Page 420, ligne 6 en remontant, *au lieu de* 471, *lire* 474.

Page 435, dernière ligne, *au lieu de* Chapitre XX, Exercice proposé n° 10. *lire* Exercice résolu n° 8 du présent Chapitre.

Page 515, dernière ligne, *au lieu de* 18, *lire* 19.

Page 636, ligne 4 en remontant, *au lieu de* IX, *lire* XX.

Page 648, ligne 2 en remontant, *au lieu de* 29, *lire* 30.

Tome II (*Exercices*).

Page 14, ligne 10, *au lieu de* (n° 283), *lire* (t. I, n° 28); ligne 23, *au lieu de* (n° 292), *lire* (t. I, n° 292).

Page 15, ligne 17, *au lieu de* n° 25, *lire* n° 35.
Page 75, ligne 23, *au lieu de* 9, *lire* 11.
Page 82, ligne 3 en remontant, *au lieu de* 41, *lire* 42.
Page 117, ligne 19, *au lieu de* 17, *lire* 18.
Page 119, ligne 6, *au lieu de* 15, *lire* 17.
Page 120, ligne 7, *au lieu de* 134, *lire* 133.
Page 167, ligne 5 en remontant, *au lieu de* 227, *lire* 226.
Page 220, ligne 4, *au lieu de* 265, *lire* 266.
Page 273, ligne 10, *au lieu de* 233, *lire* 223.
Page 278, ligne 9, *au lieu de* 334, *lire* 344.
Page 293, ligne 5, *au lieu de* 259, *lire* 258.
Page 298, ligne 22, *au lieu de* (32), *lire* (31).
Page 316, ligne 16, *au lieu de* 38, *lire* 57.
Page 327, ligne 21, *au liéu de* 6, *lire* 18.
Page 334, ligne 18, *au lieu de* 37, *lire* 39.
Page 357, lignes 1 et 2 en remontant, *au lieu de* proposé, *lire* résolu.
Page 365, ligne 6, *au lieu de* 444, *lire* 442.
Page 393, ligne 11, *au lieu de* 5, *lire* 25.
Page 394, ligne 2 en remontant, *au lieu de* 17, *lire* 19; dernière ligne, *au lieu de* 18, *lire* 20.

TABLE DES MATIÈRES.

		Pages.
CHAPITRE I.	— *Homogénéité. Construction des expressions algébriques.*	1
CHAPITRE II.	— *Grandeurs orientées. Projections.*	4
CHAPITRE III.	— *Coordonnées*	9
CHAPITRE IV.	— *Lignes et surfaces*	22
CHAPITRE V.	— *Lieux géométriques*	32
CHAPITRE VI.	— *La droite en Géométrie plane*	48
CHAPITRE VII.	— *Le plan et la droite dans l'espace*	65
CHAPITRE VIII.	— *Théorie des vecteurs*	79
CHAPITRE IX.	— *Rapport anharmonique. Homographie; involution*	100
CHAPITRE X.	— *Coordonnées trilinéaires et tétraédriques*	120
CHAPITRE XI.	— *Le cercle*	126
CHAPITRE XII.	— *La sphère*	139
CHAPITRE XIII.	— *Tangentes et plans tangents*	148
CHAPITRE XIV.	— *Étude d'une courbe au voisinage d'un de ses points*	165
CHAPITRE XV.	— *Asymptotes*	173
CHAPITRE XVI.	— *Construction des courbes planes*	181
CHAPITRE XVII.	— *Étude des courbes planes en coordonnées polaires*	197
CHAPITRE XVIII.	— *Courbes et surfaces unicursales*	211
CHAPITRE XIX.	— *Théorie des enveloppes*	230
CHAPITRE XX.	— *Coordonnées tangentielles*	245
CHAPITRE XXI.	— *Courbure des courbes planes*	253
CHAPITRE XXII.	— *Courbure des courbes gauches*	265
CHAPITRE XXIII.	— *Courbure des lignes tracées sur une surface*	271
CHAPITRE XXIV.	— *Problèmes de Géométrie qui conduisent à des équations différentielles*	284
CHAPITRE XXV.	— *Surfaces de révolution; hélicoïdes*	305
CHAPITRE XXVI.	— *Surfaces réglées, développables; cônes et cylindres*	318
CHAPITRE XXVII.	— *Notions sur les systèmes de droites*	330
CHAPITRE XXVIII.	— *Transformations*	339
CHAPITRE XXIX.	— *Propriétés projectives des courbes et surfaces du second degré*	358
CHAPITRE XXX.	— *Classification des courbes et surfaces du second degré; points à l'infini, centres, diamètres, plans diamétraux*	372
CHAPITRE XXXI.	— *Directions principales; équations réduites en coordonnées rectangulaires*	384
CHAPITRE XXXII.	— *Intersection des coniques et quadriques*	395
CHAPITRE XXXIII.	— *Détermination des coniques et quadriques; équations générales; faisceaux et réseaux*	408

Pages.

CHAPITRE XXXIV. — *Foyers*..... 422
CHAPITRE XXXV. — *Étude des coniques sur leurs équations réduites*..... 431
CHAPITRE XXXVI. — *Étude des quadriques sur leurs équations réduites*... 443
CHAPITRE XXXVII. — *Les coniques considérées comme courbes unicursales; rapport anharmonique, homographie*..... 457
CHAPITRE XXXVIII. — *Courbes et surfaces du troisième et du quatrième degré*..... 463
CHAPITRE XXXIX — *Courbes cycloïdales*..... 478
CHAPITRE XL. — *Courbes et surfaces diverses*..... 492

ERRATA..... 499

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME II.

61515-21 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

QA
37
H3
t.2
ptie.2
Physical &
Applied Sci.

Haag, Jules
Cours complet de mathématiques spéciales

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY